Edit. princeps mutila

Versio latina Archimedis et
Eutochii Ascalonitae commentaria
desunt

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ
νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI

PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EX-
cellentissimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam seculis desiderata, atq; à quàm paucissimis hactenus uisa, nuncq; primùm & Græcè & Latinè in lucem edita.

Quorum Catalogum uersa pagina reperies.

Adiecta quoq; sunt

EVTOCII ASCALONITAE

IN EOSDEM ARCHIMEDIS LIbros Commentaria, item Græcè & Latinè, nunquam antea excusa.

Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio ad quinquennium.

Basileae
Joann. Hervagius
1544

ARCHIMEDIS OPERVM
HOC LIBRO CONTENTOrum Catalogus.

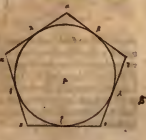
καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων, ἀπεστάλκαμέν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἐξέσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι. ἔρρωσο.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

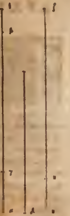
ΓΡΑΦΟΝΤΑΙ πρῶτον τά τε ἀξιώματα, καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν. εἰσί τινες ἐν ἐπιπέδῳ καμπύλαι γραμμαὶ πεπερασμέναι, αἳ τῶν τὰ πέρατα ἐπιζευγνυουσῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτά εἰσιν, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλην καλῶ τὴν τοιαύτην γραμμήν, ἐν ᾗ ἐὰν δύο σημείων λαμβανομένων ὁποιωνοῦν, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς γραμμῆς, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾽ αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπιφάνειαι τινές εἰσι πεπερασμέναι, αὐταὶ μὲν οὐκ ἐν ἐπιπέδῳ, τὰ δὲ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐν ᾧ τὰ πέρατα ἔχουσιν, ἤτοι ὅλαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔσονται, ἢ οὐδὲν ἔχουσιν ἐπὶ τὰ ἕτερα. ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὴ κοίλας καλῶ τὰς τοιαύτας ἐπιφανείας, ἐν αἷς ἂν δύο σημείων λαμβανομένων, αἱ μεταξὺ τῶν σημείων εὐθεῖαι, ἤτοι πᾶσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ πίπτουσι τῆς ἐπιφανείας, ἢ τινὲς μὲν ἐπὶ τὰ αὐτά, τινὲς δὲ κατ᾽ αὐτῆς, ἐπὶ τὰ ἕτερα δὲ μηδεμία. τομέα δὲ στερεὸν καλῶ, ἐπειδὰν σφαῖραν κῶνος τέμνῃ, κορυφὴν ἔχων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς σφαίρας, τὸ ἐμπεριεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐντὸς τοῦ κώνου. ῥόμβον δὲ καλῶ στερεόν, ἐπειδὰν δύο κῶνοι τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντες, τὰς κορυφὰς ἔχωσιν ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως, ὅπως οἱ ἄξονες αὐτῶν ἐπ᾽ εὐθείας ὦσι κείμενοι, τὸ ἐξ ἀμφοῖν τοῖν κώνοιν συγκείμενον στερεὸν σχῆμα. λαμβάνω δὲ ταῦτα, τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. τῶν δὲ ἄλλων γραμμῶν ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ οὖσαι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχωσιν, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπό τε τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς εὐθείας τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ὁμοίως καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ἔχωσιν, ἐλάσσονα εἶναι τὴν ἐπίπεδον. τῶν δὲ ἄλλων ἐπιφανειῶν, καὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν, ἐὰν ἐν ἐπιπέδῳ τὰ πέρατα ᾖ, ἀνίσους εἶναι τὰς τοιαύτας, ἐπειδὰν ὦσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι, καὶ ἤτοι ὅλη περιλαμβάνηται ὑπό τε τῆς ἑτέρας ἡ ἑτέρα ἐπιφάνεια, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ, ἢ τινὰ μὲν περιλαμβάνηται, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχῃ, καὶ ἐλάσσονα εἶναι τὴν περιλαμβανομένην. ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν, καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν, καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν, τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων. τούτων δὲ ὑποκειμένων, ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ, φανερόν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἑκάστη γὰρ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, τῆς ὑπὸ τῆς αὐτῆς ἀποτεμνομένης.

ΕΑΝ περὶ κύκλον πολύγωνον περιγραφῇ, ἡ τοῦ περιγραφέντος πολυγώνου περίμετρος, μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. περὶ γὰρ κύκλον πολύγωνον περιγεγράφθω τὸ ὑποκείμενον. λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου. ἐπεὶ γὰρ συναμφότερος ἡ βαλ μείζων ἐστὶ τῆς βλ περιφερείας, διὰ τὸ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαν περιλαμβάνειν τὴν περιφέρειαν, ὁμοίως καὶ συναμφότερος μὲν ἡ δγ, γβ, τῆς δβ. συναμφότερος δὲ ἡ λκ, κθ, τῆς λθ. συναμφότερος δὲ ἡ ζη, ηθ, τῆς ζθ. ἔτι δὲ συναμφότερος ἡ δε, εζ, τῆς δζ. ὅλη ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου μείζων ἐστὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

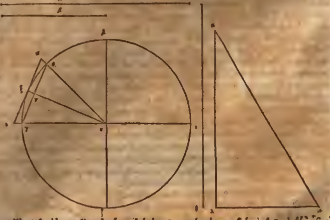


ΔΥο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, δυνατόν ἐστιν εὑρεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα εὐθεῖαν πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα, τὰ αβ, δ.

καὶ ἔστω μεῖζον τὸ α β. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστι δύο εὐθείας ἀνίσους εὑρεῖν, τὸ εἰρημένον ἐπίταγμα ποιούσας. κείσθω διὰ τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου τῶν Εὐκλείδου, τῷ δ ἴσον τὸ β γ, καὶ κείσθω τις εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ζ η. τὸ δὴ γ α ἑαυτῷ ἐπισυντιθέμενον ὑπερέξει τοῦ δ. πεπολλαπλασιάσθω οὖν, καὶ ἔστω τὸ α θ. καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α θ τοῦ α γ, τοσαπλάσιος ἔστω ἡ ζ η τῆς η ε. ἔστιν ἄρα ὡς θ α πρὸς α γ, οὕτως ἡ ζ η πρὸς η ε. καὶ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ἡ ε η πρὸς η ζ, οὕτως τὸ α γ πρὸς α θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ α θ τοῦ δ, τουτέστι τοῦ γ β. τὸ ἄρα γ α πρὸς τὸ α θ λόγον ἐλάσσονα ἔχει, ἤπερ τὸ γ α πρὸς γ β. καὶ συνθέντι ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α β πρὸς β γ (διὰ λῆμμα) ἴσον δὲ τὸ β γ τῷ δ. ἡ ε ζ ἄρα πρὸς ζ η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α β πρὸς τὸ δ. εὑρημέναι εἰσὶν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, ποιοῦσαι τὸ (ἴσον) ἐπίταγμα. τουτέστι τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἐλάσσονα, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον.



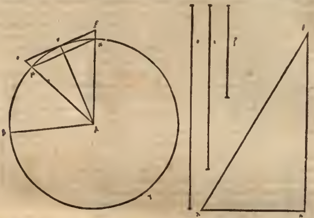
γ Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, καὶ κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι. ὅπως ἡ τοῦ περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου πλευρὰν, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη τὰ α β. ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ὑποκείμενος. λέγω οὖν, ὅτι δυνατόν ἐστι ποιεῖν τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν δὲ δύο εὐθεῖαι αἱ θ, κ λ, ὧν μείζων ἔστω ἡ θ. ὥστε τὴν θ πρὸς τὴν κ λ, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλαττον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ λ τῇ κ λ πρὸς ὀρθὰς ἡ λ μ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ τῇ θ ἴση κατήχθω ἡ κ μ. δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἤχθωσαν τοῦ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ γ ε, δ ζ. τέμνοντες οὖν τὴν ὑπὸ τῶν δ η γ γωνίαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες λείψομεν τινὰ γωνίαν ἐλάσσονα ἢ διπλασίαν τῆς ὑπὸ λ κ μ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ν η γ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ν γ. ἡ ἄρα ν γ πο-



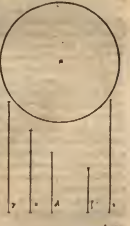
λυγώνου ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου. ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ν η γ γωνία μετρεῖ τὴν ὑπὸ δ η γ ὀρθὴν οὖσαν, καὶ ἡ ν γ ἄρα περιφέρεια μετρεῖ τὴν γ δ, τέταρτον οὖσαν κύκλου· ὥστε καὶ τὸν κύκλον μετρεῖ. πολυγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἰσοπλεύρου ἡ γ ν. φανερὸν γάρ ἐστι τοῦτο. καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ γ η ν γωνία δίχα τῇ η ξ εὐθείᾳ. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἐφαπτέσθω τοῦ κύκλου ἡ ο ξ π. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ η ν π, η γ ο. ὥστε καὶ ἡ π ο πολυγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον, καὶ ἰσοπλεύρου, φανερόν ἐστι καὶ ὁμοίου τῷ ἐγγραφομένῳ, οὗ πλευρὰ ἡ ν γ. ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων ἡ ὑπὸ ν η γ τῆς ὑπὸ λ κ μ, διπλασία δὲ τῆς ὑπὸ τ η γ, ἐλάσσων ἐστὶν ἄρα ἡ ὑπὸ τ η γ τῆς ὑπὸ λ κ μ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς λ τ. ἡ ἄρα μ κ πρὸς λ κ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ η πρὸς η τ. ἴση δὲ ἡ γ η τῇ η ξ.

τῆς κξ. ὥστε ἡ κξ πρὸς κτ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τουτέστιν ἡ πο πρὸς νγ. ἢ ἡ μκ πρὸς κλ. ἔτι
δὲ ἡ κμ πρὸς κλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ α πρὸς τὸ β. καὶ ἔστι μὲν ἡ πο πλευρὰ τοῦ περιγρα-
φομένου πολυγώνου, ἡ δὲ γν τοῦ ἐγγραφομένου· ὅπερ προέκειτο εὑρεῖν.

Πάλιν δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον πε- δ
ριγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν, πρὸς τὴν ἐγγεγραμ-
μένου πλευρὰν, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἔστω γὰρ πάλιν δύο



μεγέθη ἄνισα τὰ εζ. ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ε, κύκλος δέ τις ὁ αβγ, κέντρον ἔχων τὸ δ. καὶ πρὸς
τὸ δ τομεὺς συνεστάτω ὁ αδβ. δεῖ δὴ περιγράψαι, καὶ ἐγγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν αβδ
τομέα, ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῶν βδα, ὅπως γένηται τὸ ἐπίταγμα. εὑρήσθωσαν γὰρ
δύο εὐθεῖαι αἱ ηθκ ἄνισοι, καὶ μείζων ἡ η. ὥστε τὴν η πρὸς τὴν θκ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ
τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. δυνατὸν γὰρ τοῦτο. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ὁμοίως ἀχθείσης πρὸς ὀρθὰς
τῇ θκ τῆς θλ, προσβεβλήσθω τῇ η ἴση ἡ κλ. δυνατὸν γάρ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ η τῆς θκ, τεμ-
νομένης δὲ τῆς ὑπὸ τῶν αδβ γωνίας δίχα, καὶ τῆς ἡμισείας δίχα, καὶ ἀεὶ τούτου γινομένου λει-
φθήσεταί τις γωνία, ἐλάσσων οὖσα ἢ διπλασία τῆς ὑπὸ λκθ.
λελείφθω οὖν ἡ ὑπὸ αδμ. ἡ αμ οὖν γὰρ πολυγώνου πλευρὰ
ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἐὰν τέμωμεν τὴν ὑπὸ αδμ
γωνίαν δίχα τῇ δν, καὶ ἀπὸ τοῦ ν, ἐπ' ἀγάγωμεν ἐφαπτομένην
τοῦ κύκλου τὴν νξο, αὕτη πλευρὰ ἔσται τοῦ πολυγώνου τοῦ περι-
γραφομένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, ὁμοίου τῷ εἰρημένῳ. καὶ ὁ-
μοίως τοῖς προειρημένοις ἡ ξο πρὸς τὴν αμ ἐλάσσονα λόγον ἔ-
χει, ἤπερ τὸ ε μέγεθος πρὸς τὸ ζ.

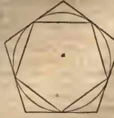


Κύκλου δοθέντος καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων, περιγράψαι
περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥστε ε
τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ
μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. ἐκκείσθω κύκλος ὁ α, καὶ
δύο μεγέθη ἄνισα τὰ εζ. καὶ μεῖζον τὸ ε. δεῖ οὖν πολύγωνον
ἐγγράψαι εἰς τὸν κύκλον. καὶ ἄλλο περιγράψαι, ἵνα γένηται
τὸ ἐπιταχθέν. λαμβάνω γὰρ δύο εὐθείας ἀνίσους τὰς γδ. ὧν
μείζων ἔστω ἡ γ. ὥστε τὴν γ πρὸς τὴν δ ἐλάσσονα λόγον ἔ-
χειν, ἢ τὸ ε πρὸς τὸ ζ. καὶ τῶν γδ μέσης ἀνὰ λόγον ληφθεί-
σης τῆς η, μείζων ἄρα καὶ ἡ γ τῆς η. περιγεγράφθω δὲ περὶ κύκ-
λον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὴν τοῦ περιγρα-

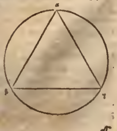
φέντος πολυγώνου πλευρὰν, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὴν γ πρὸς τὴν η, καθὼς ἐμάθομεν. διὰ τοῦτο δὴ καὶ ὁ διπλάσιος λόγος τοῦ διπλασίου ἐλάσσων ἐστί. καὶ τῆς μὲν τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν πλευρὰν, διπλάσιός ἐστιν ὁ τοῦ πολυγώνου πρὸς τὸ πολύγωνον· ὅμοια γάρ. τῆς δὲ γ πρὸς τὴν η, ὁ τῆς γ πρὸς τὴν δ. καὶ τὸ περιγραφὲν ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γ πρὸς τὴν δ. πολλῷ ἄρα καὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε πρὸς τὸ ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων, καὶ τομέως, δυνατόν ἐστι περὶ τὸν τομέα πολύγωνον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ὅμοιον αὐτῷ, ἵνα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχῃ, ἢ τὸ μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. φανερὸν δὲ καὶ τοῦτο, ὅτι ἐὰν δοθῇ κύκλος, ἢ τομεὺς, καὶ χωρίον τι, δυνατόν ἐστιν ἐγγράφοντα εἰς τὸν κύκλον, ἢ τὸν τομέα πολύγωνα ἰσόπλευρα. καὶ ἔτι ἀεὶ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα, λείπειν τινὰ τμήματα τοῦ κύκλου ἢ τομέως, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προκειμένου χωρίου· ταῦτα γὰρ ἐν τῇ στοιχειώσει παραδέδοται.

ε Δεικτέον δὲ, ὅτι καὶ κύκλου δοθέντος, ἢ τομέως καὶ χωρίου, δυνατόν ἐστι περιγράψαι πολύγωνον περὶ τὸν κύκλον, ἢ τομέα, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τῆς περιγραφῆς τμήματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ δοθέντος χωρίου. ἔστι γὰρ ἐπὶ κύκλου δείξαντα, μεταγαγεῖν τὸν ὅμοιον λόγον καὶ ἐπὶ τοῦ τομέως. δεδόσθω κύκλος ὁ α, καὶ χωρίον τι τὸ β, δυνατὸν δὴ περιγράψαι περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, ὥστε τὰ ἀπολειφθέντα τμήματα μεταξὺ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ πολυγώνου ἐλάσσονα εἶναι τοῦ β χωρίου. καὶ γὰρ ὄντων δύο μεγεθῶν ἀνίσων, μείζονος μὲν συναμφοτέρου τοῦ χωρίου καὶ τοῦ κύκλου, ἐλάσσονος δὲ τοῦ κύκλου, περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον πολύγωνον, καὶ ἄλλο ἐγγεγράφθω, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸ εἰρημένον μεῖζον μέγεθος πρὸς τὸ ἔλασσον. τοῦτο δὴ τὸ περιγραφόμενον πολύγωνόν ἐστιν οὗ τὰ περιλείμματα ἔσται ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου τοῦ β. εἰ γὰρ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον· τοῦ δὲ ἐγγραφομένου μείζων ὁ κύκλος, πολλῷ μᾶλλον τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς αὐτὸν τὸν κύκλον. καὶ διελόντι ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. ἐλάσσονα ἄρα τὰ ἀπολείμματα τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου τοῦ β χωρίου, ἢ οὕ. ἐπεὶ τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸν κύκλον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ συναμφότερον, ὅ τε κύκλος καὶ τὸ β χωρίον πρὸς τὸν κύκλον. διὰ τοῦτο δὴ ἔλασσον ἔσται τὸ περιγραφὲν συναμφοτέρου. ὥστε καὶ ἄλλα τὰ περιλείμματα ἐλάσσονα ἔσται τοῦ χωρίου τοῦ β. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ τομέως.





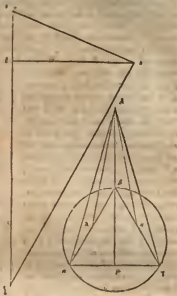
ς Ἐὰν ἐν ἰσοσκελεῖ κώνῳ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἰσόπλευρον ἔχουσα βάσιν, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ, βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως. ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεως κάθετον ἀγομένην. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς, οὗ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ εἰς αὐτὸν ἐγγεγράφθω πυραμὶς ἰσόπλευρον ἔχουσα τρίγωνον τὸ αβγ. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, καὶ ἰσόπλευρος ἡ βάσις τῆς πυραμίδος, τὰ ὕψη τῶν περιεχόντων τριγώνων τὴν πυραμίδα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. καὶ βάσιν μὲν ἔχει τὰ τρίγωνα, τὰς αβ, βγ, γα. ὕψος δὲ, τὸ εἰρημένον. ὥστε τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην ταῖς αβ, βγ, γα. ὕψος δὲ τὴν εἰρημένην εὐθεῖαν, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, χωρὶς τοῦ αβγ τριγώνου.



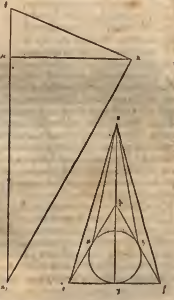
ΣΑΦΕΣΤΕΡΟΝ ΑΛΛΩΣ Η ΔΕΙΞΙΣ.

Ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς, οὗ βάσις μὲν ὁ αβγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ

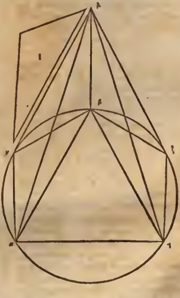
δ σημεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν κῶνον πυραμίς, βάσιν μὲν ἔχουσα ἰσόπλευρον τρίγωνον τὸ αβγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δγ, δβ. λέγω ὅτι τὰ αδβ, αδγ, βδγ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τριγώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου. ἡ δὲ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, ἴση τῇ καθέτῳ τῇ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν βγ ἀγομένῃ. ἤχθωσαν γὰρ κάθετοι αἱ δκ, δλ, δμ. αὗται ἄρα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ κείσθω τρίγωνον τὸ εζη, ἔχον τὴν μὲν εζ βάσιν τῇ περιμέτρῳ τοῦ αβγ τριγώνου ἴσην. τὴν δὲ ηθ κάθετον τῇ δλ ἴσην. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν βγ, δλ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δβγ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, δκ διπλάσιον τοῦ αβδ τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ, δμ διπλάσιον τοῦ αδγ τριγώνου, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ αδγ τριγώνου· τουτέστι τῆς εζ καὶ τῆς δλ, τουτέστι τῆς ηθ, διπλάσιον τῶν αδβ, βδγ, αδγ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ εζ, ηθ διπλάσιον τοῦ εζη τριγώνου, ἴσον ἄρα τὸ εζη τρίγωνον τοῖς αδβ, βδγ, αδγ τριγώνοις.



Ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως, ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος οὗ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ πυραμὶς περιγεγράφθω ὥστε τὴν βάσιν αὐτῆς, τουτέστι τὸ δεζ πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν αβγ κύκλον εἶναι. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἴση ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ τριγώνῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ ἄξων τοῦ κώνου ὀρθός ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τουτέστι πρὸς τὸν αβγ κύκλον, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας. ἔσονται ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς δε, ζε, ζδ, αἱ ηα, ηβ, ηγ. αἱ ἄρα εἰρημέναι κάθετοι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πλευραὶ γάρ εἰσι τοῦ κώνου. κείσθω δὴ τὸ τρίγωνον τὸ θκλ, ἴσην ἔχον τὴν μὲν θκ τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ τριγώνου. τὴν δὲ λμ κάθετον ἴσην τῇ ηα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ δε, αη διπλάσιόν ἐστι τοῦ εδη τριγώνου. τὸ δὲ ὑπὸ δζ, ηβ διπλάσιόν ἐστι τοῦ δζη τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ εζ, γη διπλάσιον ἐστι τοῦ εηζ τριγώνου, ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς θκ καὶ τῆς αη, τουτέστι τῆς μλ, διπλάσιον τῶν εδη, ζδη, εηζ τριγώνων. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν θκ, λμ, διπλάσιον τοῦ λκθ τριγώνου. διά περ δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως, τριγώνῳ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ περιμέτρῳ τοῦ δεζ. ὕψος δὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.



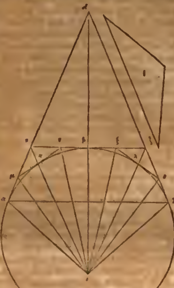
θ Ἐὰν κώνου τινὸς ἰσοσκελοῦς εἰς τὸν κύκλον, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, εὐθεῖα γραμμὴ ἐμπίπτῃ, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων αὐτῆς εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, τὸ περιληφθὲν τρίγωνον, ὑπό τε τῆς ἐμπεσούσης καὶ τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν, ἔλασσον ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐπιζευχθεισῶν. ἔστω κώνου ἰσοσκελοῦς βάσις ὁ α β γ κύκλος. κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ διήχθω τις εἰς αὐτὸν εὐθεῖα ἡ α γ. καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὰ α γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ γ. λέγω ὅτι τὸ α δ γ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστι τῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς, τῆς μεταξὺ τῶν α δ γ. τετμήσθω ἡ α β γ περιφέρεια δίχα κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, γ β, δ β. ἔσται δὴ τὰ α β δ, β γ δ, τρίγωνα μείζονα τοῦ α δ γ τριγώνου, ᾧ δὴ ὑπερέχει τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦ α δ γ τριγώνου, ἔστω τὸ θ. τὸ δὴ θ ἤτοι τῶν α β, β γ τμημάτων ἔλασσόν ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω μὴ ἔλασσον πρότερον. ἐπεὶ οὖν δύο εἰσὶν ἐπιφάνειαι, ἥ τε κωνικὴ ἡ μεταξὺ τῶν α δ β, μετὰ τοῦ α ε β τμήματος, καὶ ἡ τοῦ α δ β τριγώνου, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου τοῦ α δ β, μείζων ἔσται ἡ περιλαμβάνουσα τῆς περιλαμβανομένης, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν α δ β μετὰ τοῦ α ε β τμήματος, τοῦ α β δ τριγώνου. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ μεταξὺ τοῦ δ β γ τριγώνου, μετὰ τοῦ γ ζ β τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ β δ γ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια μετὰ τοῦ θ χωρίου ἐστὶ μείζων τῶν εἰρημένων τριγώνων. τὰ δὲ εἰρημένα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε α δ γ τριγώνῳ, καὶ τῷ θ χωρίῳ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ θ χωρίον. λοιπὴ ἄρα ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν α δ β, μείζων ἐστὶ τοῦ α δ γ τριγώνου. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν α β, β γ τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς α β, β γ περιφερείας δίχα, καὶ τὰς ἡμισείας αὐτῶν δίχα, λείψομεν τμήματα ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω τὰ ἐπὶ τῶν α ε, ε β, β ζ, ζ γ εὐθειῶν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δ ε, δ ζ. πάλιν τοίνυν κατὰ τὰ αὐτά, ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν α δ ε, μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς α ε τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ α δ ε τριγώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τοῦ ε δ β μετὰ τοῦ ἐπὶ τῆς ε β τμήματος, μείζων ἐστὶ τοῦ ε δ β τριγώνου. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν α δ β μετὰ τῶν α ε, ε β τμημάτων, μείζων ἐστὶ τῶν α δ ε, ε β δ τριγώνων. ἐπεὶ δὲ τὰ α ε δ, δ ε β τρίγωνα μείζονά ἐστι τοῦ α β δ τριγώνου, καθὼς δέδεικται, πολλῷ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ἡ μεταξὺ τῶν α δ β, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν α ε, ε β τμημάτων, μείζων ἐστὶ τοῦ α δ β τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν δ β γ, μετὰ τῶν ἐπὶ τῶν β ζ, ζ γ, μείζων ἐστὶ τοῦ β δ γ τριγώνου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν α δ γ, μετὰ τῶν εἰρημένων τμημάτων μείζων ἐστὶ τῶν α β δ, δ β γ τριγώνων. ταῦτα δέ ἐστιν ἴσα τῷ α δ γ τριγώνῳ, καὶ τῷ θ χωρίῳ, ὧν τὰ εἰρημένα τμήματα ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ τῶν α δ γ, μείζων ἐστὶ τοῦ α δ γ τριγώνου.



ι Ἐὰν ἐφάπτωνται εὐθεῖαι τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι τῷ κύκλῳ, καὶ συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν καὶ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου εὐθεῖαι ἀχθῶσι, τὰ περιεχόμενα τρίγωνα ὑπό τε τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν μείζονά ἐστι τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν. ἔστω κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ α β γ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ε σημεῖον. καὶ τοῦ α β γ κύκλου ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, αἱ α δ, γ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ ε σημείου ὅ ἐστι κορυφὴ τοῦ κώνου ἐπὶ τὰ α, δ, γ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε α, ε δ, ε γ. λέγω δή, ὅτι τὰ α δ ε, δ ε γ τρίγωνα

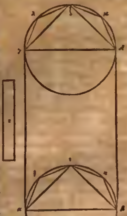
μείζονα

μείζονα ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε, γ ε εὐθειῶν, καὶ τῆς α β γ περιφερείας. ἤχθω γὰρ ἡ κ β ζ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, καὶ παράλληλος οὖσα τῇ α γ, δίχα τμηθείσης τῆς α β γ περιφερείας κατὰ τὸ β. καὶ ἀπὸ τῶν κ, ζ ἐπὶ τὸ ε ἐπεζεύχθωσαν αἱ κ ε, ζ ε. καὶ ἐπεὶ μείζους εἰσὶν αἱ κ δ, δ ζ τῆς κ ζ, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ κ α, ζ γ. ὅλαι ἄρα αἱ α δ, δ γ μείζους εἰσὶ τῶν α κ, κ ζ, ζ γ. καὶ ἐπεὶ αἱ α ε, ε β, ε γ πλευραί εἰσι τοῦ κώνου, ἴσαι εἰσί, διὰ τὸ ἰσοσκελῆ εἶναι τὸν κῶνον. ὁμοίως δὲ καὶ κάθετοί εἰσιν, ὡς ἐλέχθη ἐν τῷ λήμματι, τὰ δὲ ὑπὸ τῶν καθέτων καὶ τῶν βάσεων τῶν α κ ε, κ ε ζ, ζ ε γ τριγώνων. εἰσὶ γὰρ αἱ μὲν α κ, κ ζ, ζ γ ἐλάσσους τῶν γ δ, δ α. τὰ δὲ ὕψη αὐτῶν ἴσα. φανερὸν γάρ, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐπὶ τὴν ἐπαφὴν τῆς βάσεως ἐπιζευγνυμένη κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην. ᾧ δὴ μείζονά ἐστι τὰ α ε δ, δ γ ε τρίγωνα, τῶν α ε κ, κ ε ζ, ζ ε γ τριγώνων, ἔστω τὸ θ χωρίον. τὸ δὴ θ χωρίον, ἤτοι ἔλαττόν ἐστι τῶν περιλειμμάτων τῶν α κ β, β ζ γ, ἢ οὐκ ἔλαττον. ἔστω πρότερον οὐκ ἔλαττον. ἐπεὶ οὖν εἰσιν ἐπιφάνειαι σύνθετοι, ἥ τε τῆς πυραμίδος τῆς ἐπιβεβηκυίας τοῦ κ α, γ ζ τραπεζίου, κορυφὴν ἔχουσα τὸ ε. καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ τῶν α ε γ μετὰ τοῦ α β γ τμήματος. καὶ πέρας ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον τοῦ α ε γ τριγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τοῦ α ε γ τριγώνου, μείζων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας μετὰ τοῦ τμήματος τοῦ α β γ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ α β γ τμῆμα. λοιπὰ ἄρα τὰ τρίγωνα τὰ α κ ε, κ ε ζ, ζ ε γ, μετὰ τῶν α κ β, β ζ γ περιλειμμάτων, μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε, ε γ. τῶν δὲ α κ β, β ζ γ περιλειμμάτων οὐκ ἔλασσόν ἐστι τὸ θ χωρίον, πολλῷ ἄρα τὰ α ε κ, κ ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε, ε γ. ἀλλὰ τὰ α κ ε, κ ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ, ἐστὶ τὰ α ε δ, δ ε γ τρίγωνα. τὰ ἄρα α ε δ, δ ε γ τρίγωνα, μείζονα ἔσται τῆς εἰρημένης κωνικῆς ἐπιφανείας. ἔστω δὴ τὸ θ ἔλασσον τῶν περιλειμμάτων, ἀεὶ δὴ περιγράφοντες πολύγωνα περὶ τὰ τμήματα, ὁμοίως δίχα τεμνομένων τῶν περιλειπομένων περιφερειῶν, καὶ ἀγομένων ἐφαπτομένων, λείψομέν τινα περιλείμματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ α μ κ, κ ν β, β ξ λ, λ ο γ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ θ χωρίου, καὶ ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ ε. πάλιν φανερόν, ὅτι τὰ α ε κ, κ ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα, τῶν α ε μ, μ ε ν, ν ε ξ, ξ ε ο, ο ε γ τριγώνων ἔσται μείζονα. αἵ τε γὰρ βάσεις τῶν βάσεών εἰσι μείζους, τὸ δὲ ὕψος ἴσον. ἔτι δὲ πάλιν ὁμοίως μείζονα ἔχει ἐπιφάνειαν ἡ πυραμίς, ἡ βάσιν μὲν ἔχουσα τὸ α μ ν ξ ο γ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ ε, χωρὶς τοῦ α ε γ τριγώνου, τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε γ, μετὰ τοῦ α β γ τμήματος. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ α β γ τμῆμα, λοιπὰ ἄρα τὰ α ε μ, μ ε ν, ν ε ξ, ξ ε ο, ο ε γ τρίγωνα, μετὰ τῶν α μ κ, κ ν β, β ξ λ, λ ο γ περιλειμμάτων μείζονα ἔσται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν α ε γ. ἀλλὰ τῶν μὲν εἰρημένων περιλειμμάτων μεῖζόν ἐστι τὸ θ χωρίον. τῶν δὲ α ε μ, μ ε ν, ν ε ξ, ξ ε ο, ο ε γ τριγώνων μείζονα ἐδείχθη τὰ α ε κ, κ ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα. πολλῷ ἄρα τὰ α ε κ, κ ε ζ, ζ ε γ τρίγωνα μετὰ τοῦ θ χωρίου, τουτέστι τὰ α δ ε, δ ε γ τρίγωνα, μείζονά ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν α ε γ εὐθειῶν.



Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ ὀρθοῦ κυλίνδρου δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου, ἡ μεταξὺ ιαʹ
τῶν εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῶν ἐν τῇ ἐπιφα-
νείας

νίας τοῦ κυλίνδρου διαμέτρων, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰ πέρατα αὐτῶν. ἔστω κύλινδρος ὀρθός, οὗ βάσις μὲν ὁ α β κύκλος. ἀπεναντίον δὲ ὁ γ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, β δ. λέγω ὅτι ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ α γ, β δ παραλληλογράμμου. τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν α β, γ δ περιφερειῶν δίχα, κατὰ τὰ ε ζ σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ. καὶ ἐπεὶ αἱ α ε, ε β τῆς α β μείζους εἰσί, καὶ ἐστὶν ἰσοϋψῆ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπ' αὐτῶν. μείζονα οὖν ἐστὶ τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν αἱ βάσεις μέν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, τοῦ α β, γ δ παραλληλογράμμου. τίνι ἄρα μεῖζόν ἐστιν, ἔστω τῷ θ χωρίῳ. τὸ δὲ θ χωρίον ἤτοι ἔλασσον τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἐπιπέδων ἐστὶ τμημάτων. ἢ οὐκ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μὴ ἔλασσον. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ τμήματα πέρας ἔχει τὸ τοῦ α γ, β δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια, ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ τρίγωνα πέρας ἔχει τὸ τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον. καὶ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιλαμβάνει, καὶ ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι εἰσί. μείζων οὖν ἐστὶν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν· καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ ἐπίπεδα τμήματα τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῶν α ε β, γ ζ δ τριγώνων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ α ε β, γ ζ δ τρίγωνα. λοιπὴ οὖν ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ, ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ κυλίνδρου, ἴσα ἐστὶ τῷ α γ β δ παραλληλογράμμῳ, καὶ τοῦ θ χωρίῳ. λοιπὴ ἄρα ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου.

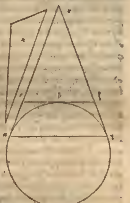


ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ θ χωρίον τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἐπιπέδων τμημάτων. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν α ε, ε β, γ ζ, ζ δ περιφερειῶν δίχα κατὰ τὰ θ, κ, λ, μ, σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ. τῶν δὲ α ε, ε β, γ ζ, ζ δ ἄρα ἐπιπέδων τμημάτων ἀφαιρεῖται οὐκ ἔλασσον ἢ τὸ ἥμισυ, τὰ α θ ε, ε κ β, γ λ ζ, ζ μ δ τρίγωνα. τούτου οὖν ἑξῆς γινομένου καταλειφθήσεταί τινα τμήματα, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ θ χωρίου. καταλελείφθω, καὶ ἔστω τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονα ἔσται τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, καὶ τὰ α ε β, γ ζ δ ἐπίπεδα τμήματα, πέρας ἔχει τὸ τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου ἐπίπεδον, ἀλλὰ καὶ ἡ συγκειμένη ἐπιφάνεια ἐκ τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. καὶ τῶν α θ ε κ β, γ λ ζ μ δ, εὐθυγράμμων. κοινὰ ἀφῃρήσθω τὰ α θ ε κ β, γ λ ζ μ δ εὐθύγραμμα. λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας ἐκ τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσεις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα, ὧν βάσεις μὲν αἱ α θ, θ ε, ε κ, κ β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων, ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν, καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων. ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β. ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου. τὰ δὲ παραλληλόγραμμα ὧν βάσεις μὲν αἱ α ε, ε β, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου, ἴσα ἐστὶ τῷ α γ δ β παραλληλογράμμῳ, καὶ τῷ θ χωρίῳ. καὶ ἡ ἀποτεμνομένη ἄρα κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια, ὑπὸ τῶν α γ, β δ εὐθειῶν. καὶ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ ἐπίπεδα τμήματα, μείζονά ἐστι τοῦ α γ β δ παραλληλογράμμου, καὶ τοῦ θ χωρίου. ἀφαιρεθέντα δὲ τὰ α θ, θ ε, ε κ, κ β, γ λ, λ ζ, ζ μ, μ δ τμήματα τοῦ θ χωρίου ἐλάσσονα.

λοιπὴ

λοιπὴ ἄρα ἡ ἀποτεμνομένη κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὑπὸ τῶν αγ, βδ εὐθειῶν, μείζων ἐστὶ τοῦ αγβδ παραλληλογράμμου.

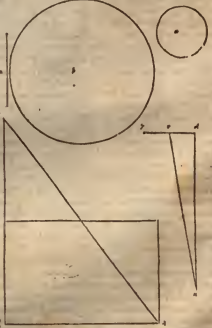
Ἐὰν ἐν ἐπιφανείᾳ κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ δύο εὐθεῖαι ὦσιν, ἀπὸ δὲ τῶν περάτων τῶν εὐθειῶν ἀχ- ιβ
θῶσί τινες ἐπιψαύουσαι τῶν κύκλων, αἵ εἰσι βάσεις τοῦ κυλίνδρου ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῶν οὖσαι, καὶ συμπίπτωσι, τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τῶν ἐπιψαυουσῶν καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονα ἔσται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς μεταξὺ τῶν εὐθειῶν τῶν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ αβγ κύκλος, καὶ ἔστωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι, ὧν πέρατα τὰ α, γ. ἀπὸ δὲ τῶν α, γ ἤχθωσαν ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι. καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ η. νοείσθωσαν δὲ καὶ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τῶν περάτων ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εὐθεῖαι ἠγμέναι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου. δεικτέον ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ἐπιψαυουσῶν, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἤχθω γὰρ ἡ εζ ἐπιψαύουσα, καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ σημείων ἤχθωσάν τινες εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ἕως τῆς ἐπιφανείας τῆς ἑτέρας βάσεως· τὰ δὴ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν αη, ηγ, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῶν παραλληλογράμμων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τῶν αε, εζ, ζγ, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ γὰρ αἱ εη, ηζ, τῆς εζ μείζους εἰσί, κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ αε, ζγ. ὅλαι ἄρα αἱ ηα, ηγ, μείζους εἰσὶ τῶν αε, εζ, ζγ. ᾧ δὴ μείζονά ἐστιν, ἔστω τὸ κ χωρίον. τοῦ δὴ κ χωρίου τὸ ἥμισυ ἤτοι μεῖζόν ἐστι τῶν σχημάτων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν αε, εζ, ζγ εὐθειῶν, καὶ τῶν αδβ, βθγ περιφερειῶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον μεῖζον· τῆς δὲ ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αε, εζ, ζγ. καὶ τοῦ αεζγ τραπεζίου, καὶ τοῦ κατεναντίον αὐτοῦ ἐν τῇ ἑτέρᾳ βάσει τοῦ κυλίνδρου, περίμετρός ἐστιν ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ κατὰ τὴν αγ. ἔστι δὲ καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν. καὶ τῶν τμημάτων τοῦ τε αβγ καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, περίμετρος ἡ αὐτὴ περίμετρος. αἱ οὖν εἰρημέναι ἐπιφάνειαι τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι τυγχάνουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἐν ἐπιπέδῳ. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ τινὰ μὲν περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν, τινὰ δὲ κοινὰ ἔχουσιν. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη. ἀφαιρεθέντων οὖν κοινῶν τοῦ τε αβγ τμήματος, καὶ τοῦ ἀπεναντίον αὐτοῦ, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ



κυλίνδρου, ἡ κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν τῆς συγκειμένης ἐπιφανείας, ἔκ τε τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αη, ηζ, ζγ. καὶ τῶν σχημάτων τῶν αεβ, βζγ. καὶ τῶν ἀπεναντίον αὐτῶν. αἱ δὲ τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἐλάττους εἰσὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν παραλληλογράμμων τῶν κατὰ τὰς αη, ηγ. μετὰ γὰρ τοῦ κ μείζονος ὄντος τῶν σχημάτων ἴσαι ἦσαν αὐτοῖς. δῆλον οὖν ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν αη, γη, καὶ τῶν πλευρῶν τοῦ κυλίνδρου, μείζονά ἐστι τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τῆς κατὰ τὴν αβγ περιφέρειαν. εἰ δὲ μή ἐστι μεῖζον τὸ ἥμισυ τοῦ κ χωρίου τῶν εἰρημένων σχημάτων, ἀχθήσονται εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ κύκλου σχήματος, ὥστε γενέσθαι τὰ περιλειπόμενα σχήματα ἐλάσσονα τοῦ ἡμίσεως τοῦ κ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν δειχθήσονται. τούτων δὲ δεδειγμένων, φανερόν ἐστι μὲν τῶν προειρημένων, ὅτι ἐὰν εἰς κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ἕκαστον γὰρ τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα τριγώνων ἔλασσόν ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τῆς μεταξὺ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν. ὥστε καὶ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κῶνον ἰσοσκελῆ πυραμὶς περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος χωρὶς τῆς βάσεως μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου χωρὶς τῆς βάσεως, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκείνῳ. φανερὸν δὲ ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων, ὅτι τε ἐὰν εἰς κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα ἐγγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἡ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένη, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως. ἔλασσον γὰρ ἕκαστον παραλληλόγραμμον τοῦ πρίσματός ἐστι τῆς καθ᾽ αὐτὸ τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. καὶ ὅτι ἐὰν περὶ κύλινδρον ὀρθὸν πρίσμα περιγραφῇ, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος ἡ ἐκ τῶν

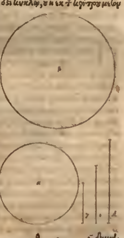
παραλληλογράμμων συγκειμένῳ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῆς βάσεως.

ιγ Παντὸς κυλίνδρου ὀρθοῦ ἡ ἐπιφάνεια χωρὶς τῆς βάσεως, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. ἔστω κυλίνδρου τινὸς ὀρθοῦ βάσις ὁ α κύκλος. καὶ ἔστω τῇ μὲν διαμέτρῳ τοῦ α κύκλου ἴση, ἡ γδ. τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κυλίνδρου ἡ εζ. ἐχέτω δὲ μέσον λόγον τῶν δγ, εζ, ἡ η. καὶ κείσθω κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ η, ὁ β. δεικτέον ὅτι ὁ β κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. δύο δὴ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων, τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, καὶ τοῦ β κύκλου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸν β κύκλον ἰσόπλευρον πολύγωνον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ περιγεγραμμένον, καὶ ἐγγεγραμμένον. καὶ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγράφθω εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β περιγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ εὐθυγράμμου πρίσμα. ἔσται δὴ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένον. ἔστω δὲ καὶ τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ περὶ τὸν α κύκλον, ἴση ἡ κδ. καὶ τῇ κδ ἴση ἡ λζ. τῆς δὲ γδ ἡμίσεια ἔστω ἡ γτ. ἔσται δὴ τὸ κδτ τρίγωνον, ἴσον τῷ περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ περὶ τὸν α κύκλον. ἐπειδὴ ἡ βάσις μὲν ἔχει τῇ περιμέτρῳ ἴσην. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. τὸ δὲ ελ παραλληλόγραμμον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον περιγεγραμμένου. ἐπειδὴ περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος. κείσθω δὴ τῇ εζ ἴση ἡ ερ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζρλ τρίγωνον, τῷ ελ παραλληλογράμμῳ, ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὰ εὐθύγραμμα, ὅνπερ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει. ἕξει ἄρα τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ περὶ τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον, λόγον, ὃν ἡ τδ πρὸς τὴν η δυνάμει. αἱ γὰρ τδ, η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ἐκ τοῦ κέντρου. ἀλλ᾽ ὃν ἔχει λόγον ἡ τδ πρὸς τὴν η δυνάμει, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει. ἡ γὰρ η τῶν τδ, ρζ μέση ἐστὶν ἀνὰ λόγον, διὰ τὸ καὶ τῶν γδ, εζ. πῶς δὲ τοῦτο; ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δτ τῇ τγ. ἡ δὲ ρε τῇ εζ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ γδ τῆς τδ. καὶ ἡ ρζ, τῆς ρε. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δγ πρὸς δτ, οὕτως ἡ ρζ πρὸς ζε. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γδ, εζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τδ, ρζ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν γδ, εζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν τδ, ρζ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τδ πρὸς η, οὕτως ἡ η πρὸς ρζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τδ πρὸς ρζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς τδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς η. ἐὰν γὰρ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνὰ λόγον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος, τὸ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ τδ πρὸς ρζ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ ρλζ. ἐπειδήπερ ἴσαι εἰσὶν αἱ κδ, λζ. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον, ὅνπερ τὸ τκδ τρίγωνον πρὸς τὸ ρζλ τρίγωνον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζλρ τρίγωνον, τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ.



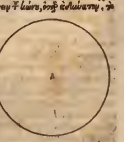
θυγράμμῳ. ὥστε καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν α κύλινδρον περιγεγραμμένου, τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν β κύκλον ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ κύκλῳ, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περὶ τὸν κύλινδρον, περιγεγραμμένου πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β τῷ κύκλῳ γεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸν β κύκλον· καὶ ἐναλλάξ, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύλινδρον, μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. τὸ δὲ γεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ β κύκλος ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἔστω δὲ, εἰ δυνατὸν, μείζων. πάλιν δὲ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ τὸν β κύκλον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α κύκλον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ. καὶ πρίσμα ἀναγεγράφθω ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. καὶ πάλιν ἡ κδ ἴση ἔστω τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου. καὶ ἡ ζλ ἴση αὐτῇ ἔστω. ἔσται δὴ τὸ μὲν κτδ τρίγωνον μεῖζον τοῦ εὐθυγράμμου, τοῦ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένου. διότι βάσιν μὲν ἔχει τὴν περίμετρον αὐτοῦ. ὕψος δὲ μεῖζον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἀγομένης καθέτου. τὸ δὲ ελ παραλληλόγραμμον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος, τῇ ἐκ τῶν παραλληλογράμμων συγκειμένῃ, διότι περιέχεται ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, καὶ τῆς ἴσης τῇ περιμέτρῳ τοῦ εὐθυγράμμου, ὅ ἐστι βάσις τοῦ πρίσματος. ὥστε καὶ τὸ ρλζ τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ πρίσματος. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ εὐθύγραμμα τὰ ἐν τοῖς α, β κύκλοις ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν δυνάμει. ἔχει δὲ καὶ τὰ κτδ, ζρλ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα, λόγον, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων δυνάμει. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ κτδ τρίγωνον πρὸς τὸ λζρ τρίγωνον. ἔλασσον δὲ ἐστὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ κτδ τριγώνου. ἔλασσον ἄρα καὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦ ζρλ τριγώνου, ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τοῦ ἐν τῷ κυλίνδρῳ ἐγγεγραμμένου. ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον περὶ τὸν β κύκλον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου· καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δὲ ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν β κύκλον τοῦ β κύκλου. μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ β κύκλῳ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ὥστε καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος, οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ β κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα ἐστί.

Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς χωρὶς τῆς βάσεως, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς πλευρᾶς τοῦ κώνου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου ἔστω ἡ γ. τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου ἔστω ἴση ἡ δ, τῶν δὲ γ, δ μέση ἀνὰ λόγον ἡ ε. ὁ δὲ β κύκλος ἐχέτω τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε ἴσην, λέγω ὅτι ὁ β κύκλος ἐστὶν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, χωρὶς τῆς βάσεως. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον ἐλάσσων. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, καὶ ὁ β κύκλος. καὶ μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. δυνατὸν ἄρα εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. νοείσθω δὴ καὶ περὶ τὸν α κύκλον πολύγωνον περιγεγραμμένον, ὅμοιον τῷ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένῳ. καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν α κύκλον περιγεγραμμένου πολυγώνου πυραμὶς ἀνεστάτω ἀναγεγραμμένη, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα τὰ περὶ τοὺς α, β κύκλους περιγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας· τουτέστιν, ὃν ἔχει ἡ γ πρὸς ιδ

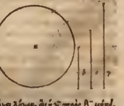


β ζ ε δυνά.

ε δυνάμει, τουτέστιν ἡ γ πρὸς δ μήκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ γ πρὸς δ μήκει, τοῦτον ἔχει τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον περὶ τὸν α κύκλον, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ἡ μὲν γὰρ γ ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθέτῳ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἡ δὲ δ τῇ πλευρᾷ τοῦ κώνου. κοινὸν δὲ ὕψος ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, πρὸς τὰ ἡμίση τῶν ἐπιφανειῶν. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν α κύκλον πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον. καὶ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος περιγεγραμμένης περὶ τὸν κῶνον. ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ περὶ τὸν β κύκλον, περιγεγραμμένῳ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ εὐθύγραμμον τὸ περὶ τὸν β κύκλον, περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον, ἐλάσσονα λόγον ἕξει ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς περὶ τὸν κῶνον περιγεγραμμένης, πρὸς τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ β κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν β κύκλον. ὅπερ ἀδύνατον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος μείζων οὖσα δέδεικται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ β κύκλῳ, ἔλασσον ἔσται τοῦ β κύκλου. οὐκ ἄρα ὁ β κύκλος ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. λέγω δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω, ἔστω μείζων. πάλιν δὲ νοείσθω εἰς τὸν β κύκλον πολύγωνον ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. καὶ εἰς τὸν α κύκλον νοείσθω ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, ὅμοιον τῷ εἰς τὸν β κύκλον ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ ἐν τοῖς α, β ἐγγεγραμμένα, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον πρὸς ἄλληλα, ὃν αἱ ἐκ τῶν κέντρων δυνάμει πρὸς ἀλλήλας, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν δ μήκει. ἡ δὲ γ πρὸς τὴν δ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον. ἡ γὰρ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου πρὸς πλευρὰν τοῦ κώνου, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου, κάθετον ἀγομένην ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ α κύκλῳ ἐγγεγραμμένον πρὸς τὸ πολύγωνον τὸ ἐν τῷ β ἐγγεγραμμένον, ἢ αὐτὸ τὸ πολύγωνον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, τοῦ ἐν τῷ β πολυγώνου ἐγγεγραμμένου. ἐλάσσονα δὲ λόγον ἔχει τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου. πολλῷ ἄρα τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν β κύκλον περιγεγραμμένον πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ ἐγγεγραμμένης ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ β κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ περιγεγραμμένον πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ β κύκλου. ἡ δὲ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος τῆς ἐν τῷ κώνῳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, οὐκ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἐστὶν ὁ κύκλος τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων, ἴσος ἄρα.

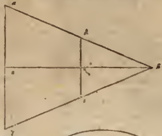


ιε Παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ κώνου. ἔστω κῶνος ἰσοσκελής, οὗ βάσις ὁ α κύκλος. ἔστω δὲ τῇ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α, ἴση ἡ β, τῇ δὲ πλευρᾷ τοῦ κώνου, ἡ γ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου πρὸς τὸν α κύκλον, καὶ ἡ γ πρὸς τὴν β. εἰλήφθω γὰρ τῶν β, γ μέση ἀνάλογον ἡ ε, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ δ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ε. ὁ δ ἄρα κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ τούτου. ἐδείχθη δὲ ὁ δ κύκλος πρὸς τὸν α κύκλον, λόγον ἔχων τὸν αὐτόν, τῷ τῆς γ πρὸς β μήκει. ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ε πρὸς β δυνάμει. διὰ τὸ τοὺς κύκλους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων. αἱ γὰρ διάμετροι, καὶ τὰ ἡμίση, τουτέστιν αἱ ἐκ τοῦ κέντρου, ταῖς δὲ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν, αἱ β, ε, δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, πρὸς τὸν α κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἡ γ πρὸς β μήκει.



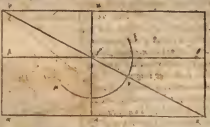
Ἐὰν

Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέσον λόγον ἔχει τῆς τε πλευρᾶς τοῦ κώνου, τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, καὶ τῆς ἴσης ἀμφοτέραις ταῖς ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, τῶν ἐν τοῖς παραλλήλοις ἐπιπέδοις. ἔστω κῶνος οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον τῷ α β γ. καὶ τετμήσθω παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν δ ε. ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἔστω β η. κύκλος δέ τις ἐκκείσθω, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνάλογον ἐστὶ τῆς τε α δ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ, η α. ἔστω δὲ κύκλος ὁ θ. λέγω ὅτι ὁ θ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν δ ε, α γ. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ λ, κ. καὶ τοῦ μὲν κ κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ β δ ζ. τοῦ δὲ λ, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, δυνάσθω τὸ ὑπὸ β α η. ὁ μὲν ἄρα λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β γ κώνου. ὁ δὲ κ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ ε β. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν β α, α η, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν β δ, δ ζ, καὶ τῷ ὑπὸ τῆς α δ, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ, α η. διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν δ ζ τῇ α η, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ α β, α η δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ β δ, δ ζ δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η δύναται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τῶν κέντρων τῶν κ, θ κύκλων. ὥστε καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τοῖς κ θ κύκλοις. ἀλλ' ὁ μὲν λ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ β α γ κώνου. ὁ δὲ κ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε κώνου. λοιπὴ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἡ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν δ ε, α γ, ἴση ἐστὶ τῷ θ κύκλῳ. ιϛ





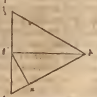
Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ β α η, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἔστω ἡ β η, τετμήσθω ἡ β α πλευρὰ ὡς ἔτυχεν κατὰ τὸ δ, καὶ διὰ τοῦ δ ἤχθω παράλληλος τῇ α η, ἡ δ θ. διὰ δὲ τοῦ ζ τῇ β α, ἡ κ λ. λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ β α η ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ β δ ζ καὶ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ β α η, ὅλον ἐστὶ τὸ β η. τὸ δὲ ὑπὸ β δ ζ, τὸ β ζ. τὸ δὲ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς δ ζ α η, ὁ μ ν ξ γνώμων. τὸ μὲν γὰρ ὑπὸ δ α η, ἴσον ἐστὶ τῷ κ η. διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ κ θ παραπλήρωμα, τῷ δ α παραπληρώματι. τὸ δὲ ὑπὸ δ α, δ ζ, τῷ δ λ. ὅλον ἄρα τὸ β η, ὅπερ ἐστὶ τὸ ὑπὸ β α η, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ β δ ζ, καὶ τῷ μ ν ξ γνώμονι, ὅς ἐστιν ἴσος τῷ ὑπὸ δ α, καὶ συναμφοτέρου τῆς α η δ ζ.

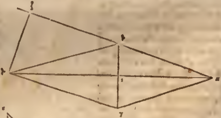


Οἱ κῶνοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς βάσεσι. καὶ οἱ ἴσας ἔχοντες βάσεις, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς ὕψεσιν. ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παρὰ τὴν βάσιν, ἔστιν ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὡς ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. τοῖς δὲ κυλίνδροις γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν οἱ κῶνοι, οἱ ἔχοντες τὰς αὐτὰς βάσεις τοῖς κυλίνδροις. καὶ τῶν ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσί. καὶ οἱ κῶνοι ὧν αἱ διάμετροι τῶν βάσεων, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς ἄξοσι, τουτέστι τοῖς ὕψεσι, πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ταῦτα δὲ πάντα ὑπὸ τῶν πρότερον ἀποδέδεικται.

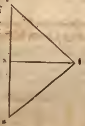


ιζ Ἐὰν ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου κάθετος ἀγομένη τῷ ὕψει ἴση ᾖ, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. ἔστωσαν δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, οἱ αβγ, δεζ. καὶ τοῦ αβγ ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ. τὸ δὲ ὕψος τὸ ακ, ἴσον ἔστω τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως τοῦ θ, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου, οἷον ἐπὶ τὴν δε καθέτῳ ἠγμένῃ τῇ κθ. λέγω ὅτι ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βάσις τοῦ αβγ, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα ἡ τοῦ βαγ βάσις, πρὸς τὴν τοῦ δεζ βάσιν, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δεζ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δεζ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ δθ πρὸς τὴν θκ. ἐδείχθη γὰρ τοῦτο, ὅτι παντὸς κώνου ἰσοσκελοῦς ἡ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν βάσιν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τουτέστιν ἡ δε πρὸς δθ. ὡς δὲ ἡ εδ πρὸς θδ, οὕτως ἡ δθ πρὸς θκ. ἰσογώνια γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα. ἴση δέ ἐστιν ἡ θκ τῇ ακ. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ βαγ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ δεζ, οὕτως τὸ ὕψος τοῦ δεζ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ αβγ. τῶν αβγ, δεζ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ βαγ, τῷ δεζ κώνῳ.





ιη Παντὶ ῥόμβῳ ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένῳ, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου κώνου τῶν περιεχόντων τὸν ῥόμβον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου. ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ αβγδ. οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν βγ κύκλος. ὕψος δὲ τὸ αδ. ἐκκείσθω δέ τις ἕτερος ὁ ηθκ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αβγ κώνου ἴσην, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἐπὶ τὴν αβ, ἢ τῇ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ ἠγμένῃ. ἔστω δὲ ἡ δζ. τὸ δὲ ὕψος τοῦ θηκ κώνου, ἔστω τὸ θλ. ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ θλ τῇ δζ. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ ῥόμβῳ. ἐκκείσθω γὰρ ἕτερος κῶνος ὁ μνξ, τὴν μὲν βάσιν ἔχων ἴσην τῇ βάσει τοῦ αβγ κώνου, τὸ δὲ ὕψος

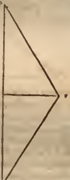


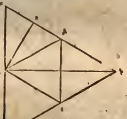


ἴσον

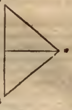
ἴσον τῷ α δ. καὶ ἔστω τὸ ὕψος αὐτοῦ τὸ ν ο. ἐπεὶ οὖν ἡ ν ο, τῇ α δ ἴση ἐστὶν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ν ο πρὸς δ ε, οὕτως ἡ α δ πρὸς δ ε. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ α δ πρὸς δ ε, οὕτως ὁ α β γ δ ῥόμβος πρὸς τὸν β γ δ κῶνον. ὡς δὲ ἡ ν ο πρὸς τὴν δ ε, οὕτως ὁ μ ν ξ κῶνος πρὸς τὸν β γ δ κῶνον, διὰ τὸ τὰς βάσεις αὐτῶν εἶναι ἴσας. ὡς ἄρα ὁ μ ν ξ κῶνος, πρὸς τὸν β γ δ κῶνον, οὕτως ὁ α β γ δ ῥόμβος, πρὸς τὸν β γ δ κῶνον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μ ν ξ, τῷ α β γ δ ῥόμβῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ κ θ κ. ὡς ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ, πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ βάσις τοῦ κ θ κ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μ ν ξ. ἡ γὰρ βάσις τοῦ α β γ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μ ν ξ. ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν, οὕτως ἡ α β πρὸς τὴν β ε, τουτέστιν ἡ α δ πρὸς δ ζ. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ κ θ κ πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μ ν ξ, οὕτως ἡ α δ πρὸς δ ζ. ἴση δὲ ἡ μὲν α δ τῇ ν ο, ὑπόκειται γάρ. ἡ δὲ δ ζ τῇ θ λ. ὡς ἄρα ἡ βάσις τοῦ κ θ κ, πρὸς τὴν βάσιν τοῦ μ ν ξ, οὕτως τὸ ν ο ὕψος πρὸς τὸ θ λ. τῶν κ θ κ, μ ν ξ ἄρα κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι ἄρα εἰσὶν οἱ κῶνοι. ἐδείχθη δὲ ὁ μ ν ξ ἴσος τῷ α β γ δ ῥόμβῳ, καὶ ὁ κ θ κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ α β γ δ ῥόμβῳ.

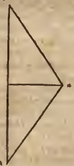
Ἐὰν κῶνος ἰσοσκελὴς ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γενομένου κύκλου, κῶνος ἀναγραφῇ κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον τῆς βάσεως· ὁ δὲ γενόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω κῶνος ἰσοσκελὴς ὁ α β γ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν δ ε. κέντρον δὲ τῆς βάσεως ἔστω τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν δ ε κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ ζ. ἔσται δὴ ῥόμβος ὁ β δ ζ ε, ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος. ἐκκείσθω δέ τις κῶνος ὁ κ θ λ. οὗ ἡ μὲν βάσις ἔστω ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ ιθ





τῇ μεταξὺ τῶν δ ε, α γ. τὸ δὲ ὕψος ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ ζ σημείου καθέτου, ἐπὶ τὴν α β, τῆς ζ η. ἔστω ἴσον τῇ ζ η. λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ α β γ κώνου νοηθῇ ἀφῃρημένος ὁ β δ ζ ε ῥόμβος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ θ κ λ κῶνος. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι οἱ μ ν ξ, ο π ρ. ὥστε τὴν μὲν τοῦ μ ν ξ βάσιν ἴσην εἶναι τῇ τοῦ α β γ κώνου ἐπιφανείᾳ, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ζ η. διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ μ ν ξ κῶνος τῷ α β γ κώνῳ. ἐὰν γὰρ ὦσι δύο κῶνοι ἰσοσκελεῖς, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπιφάνεια ἴση ᾖ τῇ τοῦ ἑτέρου βάσει. ἔτι δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου ἀγομένη κάθετος, τῷ ὕψει ἴση, ἴσοι ἔσονται οἱ κῶνοι. τὴν δὲ τοῦ ο π ρ κώνου βάσιν ἴσην εἶναι τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε κώνου, ὕψος δὲ τῇ ζ η. διὰ δὴ τοῦτο ἴσος ἐστὶν ὁ ο π ρ κῶνος, τῷ β δ ζ ε ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ προαποδέδεικται. ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ α β γ κώνου ἐπιφάνεια σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ β δ ε ἐπιφανείας, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν δ ε, α γ. ἀλλ᾽ ἡ μὲν τοῦ α β γ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μ ν ξ κώνου. ἡ δὲ τοῦ δ β ε ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ο π ρ. ἡ δὲ μεταξὺ



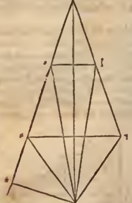


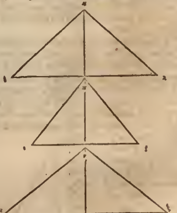
τῶν δ ε, α γ, ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θ κ λ. ἡ ἄρα τοῦ μ ν ξ βάσις ἴση ἐστὶ βάσεσι τῶν θ κ λ, ο π ρ, καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ μ ν ξ κῶνος τοῖς θ κ λ, ο π ρ κώνοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν μ ν ξ

κῶνος

κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ α β γ κώνῳ. ὁ δὲ π ο ξ, τῷ β δ ε ζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ θ κ λ κῶνος, τῷ περιλείμματι ἴσος ἐστίν.

κ Ἐὰν ῥόμβου ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκειμένου, ὁ ἕτερος κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῇ βάσει, ἀπὸ δὲ τοῦ γινομένου κύκλου κῶνος ἀναγραφῇ, κορυφὴν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ ἑτέρῳ κώνῳ· ἀπὸ δὲ τοῦ ὅλου ῥόμβου ὁ γινόμενος ῥόμβος ἀφαιρεθῇ, τῷ περιλείμματι ἴσος ἔσται ὁ κῶνος, ὃ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, ὕψος δὲ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ ἑτέρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου κώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω ῥόμβος ἐξ ἰσοσκελῶν κώνων συγκείμενος ὁ α β γ δ. καὶ τμηθήτω ὁ ἕτερος κῶνος, ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῇ βάσει, καὶ ποιείτω τομὴν τὴν ε ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν ε ζ κύκλου, κῶνος ἀναγεγράφθω τὴν κορυφὴν ἔχων τὸ δ σημεῖον. ἔσται δὴ γεγονὼς ῥόμβος ὁ ε β δ ζ. καὶ νοείσθω ἀφῃρημένος ἀπὸ



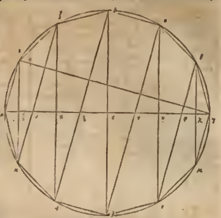


τοῦ ὅλου ῥόμβου. ἐκκείσθω δέ τις κῶνος ὁ θ κ λ, τὴν μὲν βάσιν ἴσην ἔχων τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν α γ, ε ζ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ δ σημείου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν β α, ἢ τὴν ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ. λέγω ὅτι ὁ θ κ λ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ περιλείμματι. ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο κῶνοι, οἱ μ ν ξ, ο π ρ. καὶ ἡ μὲν βάσις τοῦ μ ν ξ κώνου ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β γ. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δ η. διὰ δὴ τὰ προδειχθέντα, ἴσος ἐστὶν ὁ μ ν ξ κῶνος τῷ α β γ δ ῥόμβῳ. τοῦ δὲ ο π ρ κώνου, ἡ μὲν βάσις ἴση ἔστω τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ε β ζ κώνου. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ δ η. ὁμοίως δὴ ἴσος ἐστὶν ὁ ο π ρ κῶνος, τῷ ε β δ ζ ῥόμβῳ. ἐπεὶ δὲ ὁμοίως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ κώνου, σύγκειται ἔκ τε τῆς ε β ζ, καὶ τῆς μεταξὺ τῶν ε ζ, α γ. ἀλλὰ ἡ μὲν τοῦ α β γ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ μ ν ξ. ἡ δὲ τοῦ ε β ζ κώνου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ ο ρ π κώνου. ἡ δὲ μεταξὺ τῶν ε ζ α γ ἴση ἐστὶ τῇ βάσει τοῦ θ κ λ, ἡ ἄρα βάσις τοῦ μ ν ξ ἴση ἐστὶ ταῖς βάσεσι τῶν ο π ρ, θ κ λ. καί εἰσιν οἱ κῶνοι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ὁ μ ν ξ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τοῖς θ κ λ, ο π ρ κώνοις. ἀλλ᾽ ὁ μὲν μ ν ξ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ α β γ δ ῥόμβῳ. ὁ δὲ ο π ρ κῶνος τῷ ε β δ ζ ῥόμβῳ. λοιπὸς ἄρα ὁ κῶνος ὁ θ κ λ, ἴσος ἐστὶ τῷ περιλείμματι τῷ λοιπῷ.

κα Ἐὰν εἰς κύκλον πολύγωνον ἐγγραφῇ ἀρτιόπλευρόν τε καὶ ἰσόπλευρον, καὶ διαχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαι τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὥστε αὐτὰς παραλλήλους εἶναι μιᾷ ὁποιᾳοῦν τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν, αἱ ἐπιζευγνύουσαι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τοῦτον ἔχουσι τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ ὑποτείνουσα τὰς μιᾷ ἐλάσσονας τῶν ἡμίσεων, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου. ἔστω κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω τὸ α ε ζ β η θ γ μ ν δ λ κ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε κ, ζ λ, β δ, η ν, θ μ. δῆλον δὴ ὅτι παράλληλοί εἰσι τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ. λέγω οὖν, ὅτι αἱ εἰρημέναι πᾶσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον τὴν α γ, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τῷ τῆς γ ε πρὸς ε α. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ζ κ, λ β, η δ, θ ν. παράλληλος ἄρα ἡ μὲν ζ κ τῇ ε α, ἡ δὲ β λ τῇ ζ κ. καὶ ἔτι ἡ μὲν δ η τῇ β λ, ἡ δὲ θ ν τῇ δ η. καὶ ἡ γ μ τῇ θ ν. καὶ ἐπεὶ δύο παράλληλοί εἰσιν αἱ ε α, κ ζ, καὶ δύο διηγμέναι εἰσὶν αἱ ε κ, α ο. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ

ε ξ

ε ξ, πρὸς ξ α, ἡ κ ξ πρὸς ξ ο. ὡς δὲ ἡ κ ξ πρὸς ξ ο, ἡ ζ π πρὸς π ο. ὡς δὲ ἡ ζ π πρὸς π ο, ἡ λ π πρὸς π ρ. ὡς δὲ ἡ λ π πρὸς π ρ, οὕτως ἡ β σ πρὸς σ ρ. καὶ ἔτι ὡς μὲν ἡ β σ πρὸς σ ρ, ἡ δ σ πρὸς σ τ. ὡς δὲ ἡ δ σ πρὸς σ τ, ἡ ν υ πρὸς υ τ. καὶ ἔτι ὡς μὲν ἡ ν υ πρὸς υ τ, ἡ ν υ πρὸς υ φ. ὡς δὲ ἡ ν υ πρὸς υ φ, ἡ θ χ πρὸς χ φ. καὶ ἔτι ὡς μὲν ἡ θ χ πρὸς χ φ, ἡ μ χ πρὸς χ γ. καὶ πάντα ἄρα πρὸς πάντα ἐστὶν ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα. ὡς ἄρα ἡ ε ξ πρὸς ξ α, οὕτως αἱ ε κ, ζ λ, β δ, η ν, θ μ, πρὸς τὴν α γ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ε ξ πρὸς ξ α, οὕτως ἡ γ ε πρὸς ε α. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ γ ε πρὸς ε α, οὕτως πᾶσαι αἱ ε κ, ζ λ, β δ, η ν, θ μ, πρὸς τὴν α γ διάμετρον.

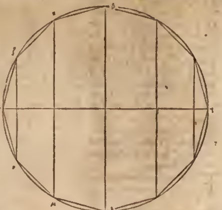


Ἐὰν εἰς τμῆμα κύκλου πολύγωνον ἐγγραφῇ τὰς πλευρὰς ἔχον χωρὶς τῆς βάσεως ἴσας καὶ ἀρτίους, ἀχθῶσιν δὲ εὐθεῖαι παρὰ τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὰς πλευρὰς ἐπιζευγνύουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ ἀχθεῖσαι πᾶσαι καὶ ἡμίσεια τῆς βάσεως πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ ἐκ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τῇ πλευρᾷ τοῦ πολυγώνου ἐπιζευγνυμένη, πρὸς τὴν τοῦ πολυγώνου πλευράν. εἰς γὰρ κύκλον τὸν α β γ, διήχθω τις εὐθεῖα ἡ α γ, καὶ ἐπὶ τῆς α γ πολύγωνον ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ τμῆμα ἀρτιόπλευρόν τε, καὶ ἴσας ἔχον τὰς πλευρὰς χωρὶς τῆς βάσεως τῆς α γ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζ η, ε θ, αἳ εἰσὶ παράλληλοι τῇ βάσει τοῦ τμήματος. λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς αἱ ζ η, ε θ, α ξ πρὸς β ξ, οὕτως ἡ δ ζ πρὸς ζ β. πάλιν γὰρ ὁμοίως ἐπεζεύχθωσαν αἱ η ε, α θ. παράλληλοι ἄρα εἰσὶ τῇ β ζ. διὰ δὴ ταῦτα ἐστὶν ὡς ἡ κ ζ πρὸς κ β, ἥ τε η κ πρὸς κ λ, καὶ ἡ ε μ πρὸς μ λ, καὶ ἡ μ θ πρὸς μ ν, καὶ ἡ ξ α πρὸς ξ ν. καὶ ὡς ἄρα πάντα πρὸς πάντα, ὡς εἷς τῶν λόγων πρὸς ἕνα. ὡς ἄρα αἱ ζ η, ε θ, α ξ πρὸς β ξ, οὕτως ἡ ζ κ πρὸς κ β. ὡς δὲ ἡ κ ζ πρὸς κ β, οὕτως ἡ δ ζ πρὸς ζ β. ὡς ἄρα ἡ δ ζ πρὸς ζ β, οὕτως αἱ ζ η, ε θ, α ξ πρὸς β ξ. κβ



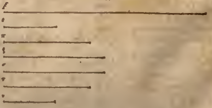
Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. αἱ δὲ α γ, β δ διάμετροι ἔστωσαν. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς α γ διαμέτρου, περιενεχθῇ ὁ α β γ δ κύκλος ἔχων τὸ πολύγωνον, δῆλον ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια αὐτοῦ κατὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἐνεχθήσεται, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου γωνίαι χωρὶς τῶν πρὸς α, γ σημείοις κατὰ κύκλων περιφερειῶν ἐνεχθήσονται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον. διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔσονται, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου παρὰ τὴν β δ οὖσαι, αἱ δὲ τοῦ πολυγώνου πλευραὶ κατὰ τινῶν κώνων ἐνεχθήσονται. αἱ μὲν α ζ, α ν κατ᾽ ἐπιφανείας κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζ ν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. αἱ δὲ ζ η, μ ν κατά τινος κωνικῆς ἐπιφανείας οἰσθήσονται, ἧς βάσις μὲν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν μ η, κορυ- κγ

φὴ δὲ τὸ σημεῖον καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ ζκ, μν ἀλλήλαις τε καὶ τῇ αγ. αἱ δὲ βκ, μδ πλευραὶ κωνικὰς ἐπιφανείας ἐργάσονται. ἧς βάσις μὲν ἐστὶν ὁ κύκλος, ὁ περὶ διάμετρον τὴν βδ, ὀρθὸς πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. κορυφὴ δὲ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἐκβαλλόμεναι αἱ βκ, δμ, ἀλλήλαις τε καὶ τῇ γα. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ πλευραὶ κωνικὰς ἐπιφανείας ἐργάσονται, πάλιν ὁμοίας ταύταις. ἔσται δή τι σχῆμα ἐγγραφόμενον ἐν τῇ σφαίρᾳ ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, τῶν προειρημένων. οὗ ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. διαιρεθείσης γὰρ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν βδ ὀρθοῦ, πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου ἡμισφαιρίου, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν πέρας ἐστὶ, τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια, τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βδ ὀρθοῦ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται αὐτῶν ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης αὐτῇ. ὁμοίως δὲ καὶ τοῦ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ σχήματος ἡ ἐπιφάνεια ἐλάσσων ἐστὶ τῆς τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπιφανείας. καὶ ὅλη οὖν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.



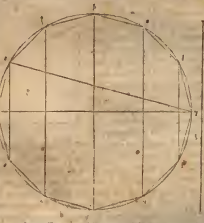


κδ Ἡ τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς πλευρᾶς τοῦ σχήματος, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου (τετραπλεύρου) παραλλήλοις οὔσαις τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινούσῃ εὐθείᾳ. ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν αὐτῷ πολύγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετρῶνται. καὶ ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου νοείσθω τι εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένον σχῆμα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εζ, κθ, γδ, κλ, μν, παράλληλοι οὖσαι τῇ ὑπὸ δύο πλευρὰς



γὰς ὑποτεινούσης εὐθείας. κύκλος δή τις ἐκκείσθω ὁ ξ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἴσης ταῖς ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. λέγω ὅτι ὁ κύκλος οὗτος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ εἰς τὴν σφαῖραν ἐγγραφομένου σχήματος. ἐκκείσθωσαν γὰρ κύκλοι οἱ ο, π, ρ, σ, τ, υ. καὶ τοῦ μὲν ο, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε α, καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ε ζ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ π, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ε α καὶ τῆς ἡμισείας τῶν ε ζ, η θ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ε α καὶ τῆς ἡμισείας τῶν η θ, γ δ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ σ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν γ δ, κ λ. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ τ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε, καὶ τῆς ἡμισείας τῶν κ λ, μ ν. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ υ, δυνάσθω τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε. καὶ τῆς ἡμισείας τῆς μ ν. διὰ δὴ ταῦτα ὁ μὲν ο κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α ε ζ κώνου, ὁ δὲ π τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ε ζ, η θ. ὁ δὲ ρ τῇ μεταξὺ τῶν η θ, γ δ. ὁ δὲ σ τῇ μεταξὺ τῶν δ γ, κ λ. καὶ ἔτι ὁ μὲν τ ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν κ λ, μ ν. ὁ δὲ υ τῇ τοῦ μ β ν κώνου ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστί. οἱ πάντες ἄρα κύκλοι ἴσοι εἰσὶ τῇ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ φανερὸν ὅτι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων, δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε καὶ δὶς τῶν ἡμισειῶν τῶν ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. αἳ ὅλαι εἰσὶν αἱ ε ζ, η θ, κ λ, μ ν. αἱ ἄρα ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων δύνανται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α ε καὶ πασῶν τῶν ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. ἀλλὰ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς α ε, καὶ τῆς συγκειμένης ἐκ πασῶν τῶν ε ζ, η θ, γ δ, κ λ, μ ν. ἡ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ξ κύκλου δύναται τὰς ἐκ τῶν κέντρων τῶν ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλων. καὶ ὁ κύκλος ἄρα ὁ ξ, ἴσος ἐστὶ τοῖς ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοις. οἱ δὲ ο, π, ρ, σ, τ, υ κύκλοι ἀπεδείχθησαν ἴσοι τῇ εἰρημένῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ὁ ξ ἄρα κύκλος ἴσος ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος.

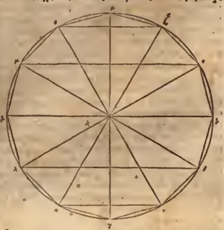
Τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν κωνικῶν κε
ἐπιφανειῶν, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον ἰσόπλευρον, οὗ αἱ πλευραὶ ὑπὸ τετράδος μετροῦνται. καὶ ἀπ' αὐτοῦ νοείσθω ἐπιφάνεια ἡ ἀπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχομένη. λέγω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγραφέντος, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσαι τοῦ πολυγώνου, αἱ α ε ι, θ μ. καὶ ταύταις παράλληλοι αἱ ζ κ, δ β, η λ. ἐκκείσθω δή τις κύκλος ὁ ρ. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ ὑπὸ τῆς ε α, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ε ι, ζ κ, β δ, η λ, θ μ. διὰ δὴ τὸ προδειχθὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος τῇ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ἴση πάσαις ταῖς ε ι, ζ κ, β δ, η λ, θ μ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου τὴν α γ, οὕτως ἡ γ ε πρὸς ε α. τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς εἰρημέναις, καὶ τῆς ε α, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ κύκλου, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α γ, γ ε. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ α γ, γ ε ἔλασσον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ, τοῦ ἀπὸ τῆς α γ. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ρ τῆς α γ. ὥστε ἡ διάμετρος τοῦ ρ κύκλου, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ α β γ δ κύκλου. καὶ δύο ἄρα τοῦ α β γ δ κύκλου διάμετροι, μείζους εἰσὶ τῆς διαμέτρου τοῦ ρ κύκλου. καὶ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ α β γ δ κύκλου, τουτέστι τῆς α γ, μεῖζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου. ὡς δὲ τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς α γ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ ρ κύκλου διαμέτρου, οὕτως τέσσαρες κύκλοι οἱ α β γ δ πρὸς τὸν ρ κύκλον. τέσσαρες ἄρα κύκλοι οἱ α β γ δ, μείζους εἰσὶ τοῦ ρ κύκλου.

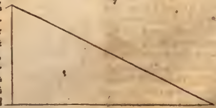


ὁ ἄρα κύκλος ὁ ρ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου. ὁ δὲ ρ κύκλος ἴσος ἐδείχθη

τῇ εἰρημένῃ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ.

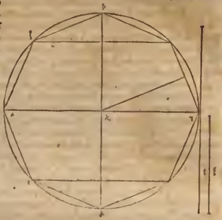
κε Τῷ ἐγγραφομένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγραφέντος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. ἔστω ἡ σφαῖρα καὶ ὁ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον. ἔστω δὲ κῶνος ὀρθὸς ὁ ξ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. δεικτέον ὅτι ὁ κῶνος ὁ ξ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ σχήματι. ἀπὸ γὰρ τῶν κύκλων ὧν εἰσὶ διάμετροι αἱ ζν, ημ, θλ, ικ, κῶνοι ἀναγεγράφθωσαν, κορυφὴν ἔχοντες τὸ τῆς σφαίρας κέντρον. ἔσται δὴ ῥόμβος στερεὸς ἐκ τῶν κώνων, οὗ βάσις μὲν ἔσται ὁ κύκλος ὁ περὶ τὴν ζν, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. καὶ τοῦ κώνου οὗ βάσις ὁ αὐτὸς κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ χ σημεῖον, ἴσος ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ναζ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ καθέτῳ ἠγμένῃ. πάλιν δὲ καὶ τὸ περιλελειμμένον τοῦ ῥόμβου τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ζν ημ. καὶ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κώνων τοῦ ζνχ, καὶ τοῦ ημχ, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς μν, ζη. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν ζη καθέτῳ ἠγμένῃ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. ἔτι δὲ καὶ τὸ περιλειπόμενον τοῦ κώνου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, θλ, καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ μηχ κώνου. καὶ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θλ, ἴσον ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τῇ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν κατὰ τὰς ημ, θλ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ ἐπὶ τὴν θη καθέτῳ ἠγμένῃ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμισφαιρίῳ ὅτι ῥόμβος ὁ χκγι, καὶ τὰ περιλείμματα τῶν κώνων ἴσα ἐστὶ τοσούτοις καὶ τηλικούτοις κώνοις, ὅσοι καὶ πρότερον ἐρρέθησαν. δῆλον οὖν ὅτι καὶ ὅλον τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἴσον ἐστὶ πᾶσι τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ κῶνοι ἴσοι εἰσὶ τῷ ξ κώνῳ. ἐπειδὴ ὁ ξ κῶνος ὕψος μὲν ἔχει ἑκάστῳ ἴσον τῶν εἰρημένων κώνων. βάσιν δὲ ἴσην πάσαις ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐστὶ τῷ ἐκκειμένῳ κώνῳ.





κζ Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ γινόμενος κῶνος ἴσος τῷ σχήματι τῷ ἐγγεγραμμένῳ ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὴν βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ ἐγγραφέντος πολυγώνου ὁ ξ. ὁ δὲ κῶνος ὁ ξ.

ὁ ξ ἴσον, βάσιν ἔχων ἴσην τῷ α β γ δ κύκλῳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β γ δ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ κῶνος βάσιν ἔχει ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ χ καθέτῳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν α ζ. ἐδείχθη δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου. ἔστιν ἄρα ἡ τοῦ ρ κώνου βάσις ἐλάσσων ἢ τετραπλασία τῆς βάσεως τοῦ ξ κώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὕψος τοῦ ρ ἔλασσον τοῦ ὕψους τοῦ ξ κώνου. ἐπεὶ οὖν ὁ ρ κῶνος τὴν μὲν βάσιν ἔχει ἐλάσσονα ἢ τετραπλασίαν τῆς τοῦ ξ βάσεως, τὸ δὲ ὕψος ἔλασσον τοῦ ὕψους, δῆλον ὡς καὶ αὐτὸς ὁ ρ κῶνος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος τοῦ ξ κώνου. ἀλλὰ καὶ ὁ ρ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. τὸ ἄρα ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἔλασσόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον τοῦ ξ κώνου.



Ἔστω ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. περὶ δὲ τὸν α β γ δ κύκλον περιγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. τὸ δὲ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένον πολύγωνον, κύκλος περιγεγραμμένος περιλαμβανέτω, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον γινόμενος τῷ α β γ δ. μενούσης δὲ τῆς ε κ περιενεχθήτω τὸ ε ζ κ θ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τότε πολύγωνον καὶ ὁ κύκλος. δῆλον οὖν ὅτι ἡ μὲν περιφέρεια τοῦ α β γ δ κύκλου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας οἰσθήσεται, ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ ε ζ κ θ, κατ᾽ ἄλλης ἐπιφανείας σφαίρας τὸ αὐτὸ κέντρον ἐχούσης τῇ ἐλάσσονι οἰσθήσεται. αἱ δὲ ἁφαὶ καθ᾽ ἃς ἐπιψαύουσιν αἱ πλευραί, γράφουσι κύκλους ὀρθοὺς πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ. αἱ δὲ γωνίαι τοῦ πολυγώνου χωρὶς τῶν πρὸς τοῖς ε, κ σημείοις, ἐπὶ κύκλων περιφερειῶν οἰσθήσονται, ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας γεγραμμένων ὀρθῶν πρὸς τὸν ε ζ κ θ κύκλον. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου ἐπὶ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται, καθάπερ ἐπὶ τῶν πρὸ τοῦ. ἔσται οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, περὶ μὲν τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν περιγεγραμμένον, ἐν δὲ τῇ μείζονι ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, οὕτως δειχθήσεται. ἔστω γὰρ ἡ κ δ διάμετρος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, τῶν κ, δ σημείων ὄντων, καθ᾽ ἃ ἅπτονται τοῦ α β γ δ κύκλου αἱ δύο πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, διῃρημένης δὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὴν κ δ ὀρθοῦ πρὸς τὸν α β γ δ κύκλον, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, διαιρεθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. καὶ φανερὸν ὅτι τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσιν ἐν ἐπιπέδῳ. ἀμφοτέρων γὰρ τῶν ἐπιφανειῶν



πέρας ἐστὶν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια τοῦ περὶ διάμετρον τὴν κλ, ὀρθοῦ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον, καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι. καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα αὐτῶν ὑπὸ τῆς ἑτέρας ἐπιφανείας, καὶ τῆς ἐπιπέδου τῆς τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσης. ἐλάσσων οὖν ἐστὶν ἡ περιλαμβανομένη τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ τοῦ λοιποῦ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.

κη Τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πολυγώνου ὑποτεινουσῶν. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν. τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου ἐν τῇ σφαίρᾳ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κωνικῶν, δέδεικται ὅτι τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶν ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, οὔσαις παρά τινα τῶν ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινουσῶν. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προειρημένον.

κθ Τοῦ σχήματος τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔστω γὰρ ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κύκλος καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον προκειμένοις. καὶ ὁ λ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ ἔστω τοῦ προκειμένου περιγεγραμμένου περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν. ἐπεὶ οὖν ἐν τῷ εζηθ κύκλῳ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγέγραπται, καὶ ἀρτιογώνιον, αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς τοῦ πολυγώνου πλευρὰς παράλληλοι οὖσαι τῇ βζ, πρὸς τὴν ζθ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν ἡ κθ πρὸς κζ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου καὶ τῆς πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ζθ κ. ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ ζθ κ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου τῆς θκ. ἡ δὲ θκ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τοῦ αβγδ κύκλου. διπλασία γάρ ἐστι τῆς χε, οὔσης ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβγδ κύκλου. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ τετραπλάσιος ὁ λ κύκλος, τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν τῇ σφαίρᾳ.

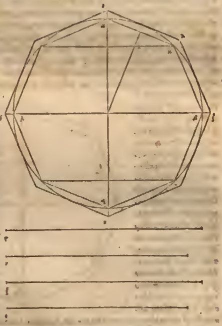


Τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν, ἐγγέγραπται ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ. τῷ δὲ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν, δέδεικται ἴσος κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ. αὕτη δέ ἐστιν ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προτεθέν. ἐκ τούτου δὲ φανερὸν, ὅτι τὸ σχῆμα τὸ περιγραφόμενον περὶ τὴν ἐλάσσονα σφαῖραν μεῖζόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ γὰρ ἴσος ἐστὶ τῷ σχήματι κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἠγμένῃ, τουτέστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστι δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν μείζων ἢ τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν

ἐν

ἐν τῇ σφαίρᾳ. μεῖζον ἄρα ἢ τετραπλάσιόν ἐστι τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν τοῦ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ καὶ ὁ κῶνος ἴσος αὐτῷ, μείζων ἢ τετραπλάσιος γίνεται τοῦ εἰρημένου. βάσιν τε γὰρ μείζονα, ἢ τετραπλασίαν ἔχει, καὶ ὕψος ἴσον.

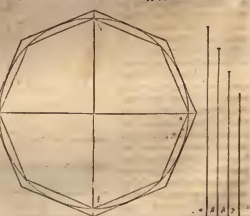
Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ σχῆμα ἐγγεγραμμένον, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὑπὸ ὁμοίων πολυγώνων λ
τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον κατεσκευασμένοις, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου περὶ τὸν μέγιστον κύκλον, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ. αὐτὸ δὲ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον, τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος ὁ α β γ δ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρον. τὸ δὲ πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγράφθω περὶ τὸν κύκλον, ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ. αἱ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευραὶ ἐφαπτέσθωσαν τοῦ κύκλου κατὰ μέσα τῶν περιφερειῶν τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου πλευρῶν. αἱ δὲ η κ, ζ θ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν ἀλλήλαις τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, καὶ ὁμοίως κείμεναι ταῖς α γ, β δ διαμέτροις, καὶ νοείσθωσαν ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰς ἀπεναντίον γωνίας τοῦ πολυγώνου, αἳ γίγνονται ἀλλήλαις τε καὶ τῇ β ζ, θ δ παράλληλοι, μενούσης δὴ τῆς ε κ διαμέτρου, καὶ περιενεχθέντων τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. τὸ μὲν περιγεγραμμένον σχῆμα ἔσται ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. δεικτέον οὖν ὅτι ἡ μὲν ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ. τὸ δὲ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ὁ μὲν μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν. ὁ δὲ ν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου, δύναται ἄρα τοῦ μὲν μ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ε λ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου. ἡ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν, τὸ ὑπὸ τῆς α κ καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς ἐπιζευγνυούσαις τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου. καὶ ἐπεὶ ὅμοια ἐστὶ τὰ πολύγωνα, ὅμοια ἂν εἴη καὶ τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τουτέστι τῶν ἐπὶ τὰς γωνίας, ἢ τὰς πλευρὰς τῶν πολυγώνων. ὥστε τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα ὃν ἔχουσιν αἱ τῶν πολυγώνων πλευραὶ δυνάμει. ἀλλὰ καὶ ὃν ἔχει λόγον τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν εἰρημένων γραμμῶν, τοῦτον ἔχουσιν αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν μ, ν κύκλων πρὸς ἀλλήλας δυνάμει. ὥστε καὶ αἱ τῶν μ, ν διάμετροι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς τῶν πολυγώνων πλευραῖς. οἱ δὲ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχουσι τῶν διαμέτρων, οἵτινες ἴσοι εἰσὶ ταῖς ἐπιφανείαις τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου. δῆλον οὖν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς



τὴν

τὴν σφαῖραν, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ. εἰλήφθωσαν δὴ δύο κῶνοι ὁ ξ, καὶ ἔστω ὁ μὲν ξ κῶνος βάσιν ἔχων τὸν ξ κύκλον, ἴσον τῷ μ. ὁ δὲ ο, βάσιν ἔχων τὸν ο κύκλον, ἴσον τῷ ν. ὕψος δὲ ὁ μὲν ξ κῶνος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ο τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν α κ κάθετον ἠγμένην. ἴσος ἄρα ὁ μὲν ξ κῶνος τῷ σχήματι τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὴν σφαῖραν. ὁ δὲ ο τῷ ἐγγεγραμμένῳ. δέδεικται γὰρ ταῦτα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ πολύγωνα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἡ ε λ πρὸς α κ, ὃν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὴν α κ κάθετον ἀγομένην. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου, ὃν ἡ ε λ πρὸς α κ. ἔχει δὲ καὶ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου λόγον, ὃν ἔχει ἡ ε λ πρὸς α κ. τῶν ἄρα ξ, ο κώνων αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τοῖς ὕψεσι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον. ὅμοιοι ἄρα εἰσί. καὶ διὰ τὸ αὐτὸ τριπλασίονα λόγον ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον, ἤπερ ἡ διάμετρος τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ν κύκλου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε λ πρὸς α κ.

λα Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἔστω τετραπλάσιος τοῦ μεγίστου κύκλου ὁ α. λέγω ὅτι ὁ α ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον μείζων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ κύκλου. ἔστι δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, καὶ ὁ α κύκλος. δυνατὸν ἄρα ἐστὶ λαβεῖν δύο εὐθείας ἀνίσους, ὥστε τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα, λόγον ἔχειν ἐλάσσονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. εἰλήφθωσαν αἱ β, γ. καὶ τῶν β γ μέση ἀνὰ λόγον ἔστω ἡ δ. νοείσθω δὲ καὶ ἡ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τετμημένη διὰ τοῦ κέντρου κατὰ τὸν ε ζ η θ κύκλον. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον πολύγωνον, ὥστε ὅμοιον εἶναι τὸ περιγεγραμμένον τῷ ἐγγεγραμμένῳ πολυγώνῳ. καὶ τὴν τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ β πρὸς τὴν δ. καὶ ὁ διπλάσιος ἄρα λόγος τοῦ διπλασίου λόγου ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ τοῦ μὲν τῆς β πρὸς δ, διπλάσιος ἐστὶν ὁ τῆς β πρὸς τὴν γ. τῆς δὲ πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου, διπλάσιος ὁ τῆς ἐπιφανείας περιγεγραμμένου στερεοῦ πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὴν σφαῖραν, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας πρὸς τὸν α κύκλον. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ α κύκλου ἐλάσσων ἐστί. δέδεικται γὰρ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἢ τετραπλασία. τοῦ δὲ μεγίστου κύκλου τετραπλάσιος ἐστὶν ὁ α κύκλος.

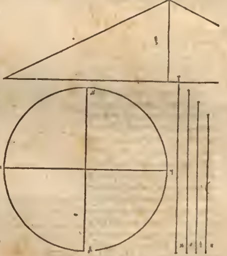


οὐκ ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω, καὶ ὁμοίως εὑρήσθωσαν αἱ β, γ εὐθεῖαι, ὥστε τὴν β πρὸς γ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, καὶ τῶν β, γ μέση ἀνὰ λόγον ἡ δ. καὶ ἐγγεγράφθω καὶ περιγεγράφθω πάλιν, ὥστε τὴν τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ τῆς β πρὸς δ, καὶ τὰ διπλάσια ἄρα. ἡ ἐπιφάνεια ἄρα τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν

γὰρ

τον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ α κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας. ὅπερ ἄτοπον. ἡ μὲν γὰρ τοῦ περιγεγραμμένου ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ α κύκλου. ἡ δὲ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ α κύκλου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων. ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἴση ἐστὶ τῷ α κύκλῳ, τουτέστι τῷ τετραπλασίῳ τοῦ μεγίστου κύκλου.

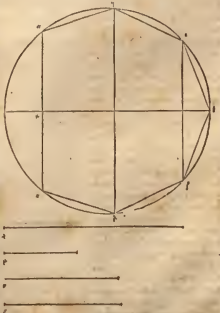
Πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ κώνου, βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ κβ
σφαίρᾳ, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ σφαῖρά τις, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. εἰ οὖν μή ἐστιν ἡ σφαῖρα τετραπλασία τοῦ εἰρημένου κώνου, ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων ἢ τετραπλασία. ἔστω δὲ ὁ ξ κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τετραπλασίαν τοῦ αβγδ κύκλου, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. μείζων οὖν ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. ἔσται δὴ δύο μεγέθη ἄνισα, ἥ τε σφαῖρα καὶ ὁ κῶνος. δυνατὸν οὖν δύο εὐθείας λαβεῖν ἀνίσους, ὥστε ἔχειν τὴν μείζονα πρὸς τὴν ἐλάσσονα λόγον ἐλάσσονα, τοῦ ὃν ἔχει ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον. ἔστωσαν οὖν αἱ κ, η. αἱ δὲ ι, θ εἰλημμέναι, ὥστε τῷ ἴσῳ ἀλλήλων ὑπερέχειν, τὴν κ τῆς ι, καὶ τὴν ι τῆς θ, καὶ τὴν θ τῆς η. νοείσθω δὲ καὶ εἰς τὸν αβγδ κύκλον ἐγγεγραμμένον πολύγωνον, οὗ τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν μετρείσθω ὑπὸ τετράδος. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ὅμοιον τῷ ἐγγεγραμμένῳ, καθάπερ ἐπὶ τοῦ πρότερον. ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. καὶ ἔστωσαν αἱ αγ, βδ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. εἰ οὖν μενούσης τῆς αγ διαμέτρου, περιενεχθείη τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ τὰ πολύγωνα, ἔσται τὸ σχῆμα τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῇ σφαίρᾳ, τὸ δὲ περιγεγραμμένον. καὶ ἕξει τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αβγδ κύκλον. ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευρὰν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ πρὸς τὴν ι. ὥστε τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλασίονα τοῦ κ πρὸς ι. ἔχει δὲ καὶ ἡ κ πρὸς η μείζονα λόγον, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς ι. τοῦτο γὰρ φανερὸν διὰ λημμάτων. πολλῷ ἄρα τὸ περιγραφὲν πρὸς τὸ ἐγγραφὲν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς η. ἡ δὲ κ πρὸς η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ σφαῖρα πρὸς τὸν ξ κῶνον, καὶ ἐναλλάξ, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ γὰρ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον μεῖζόν ἐστι τῆς σφαίρας. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ξ κώνου. διότι ὁ μὲν ξ κῶνος τετραπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ αβγδ κύκλῳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον τοῦ εἰρημένου κώνου, ἢ τετραπλάσιον. οὐκ ἄρα μείζων ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ εἰρημένου. ἔστω εἰ δυνατὸν ἐλάσσων ἢ τετραπλασία, ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν ἡ σφαῖρα τοῦ ξ κώνου. εἰλήφθωσαν δὴ αἱ κ, η εὐθεῖαι, ὥστε τὴν κ μείζονα εἶναι τῆς η, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχειν πρὸς αὐτήν, τοῦ ὃν ἔχει ὁ ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν. καὶ αἱ θ, ι ἐκκείσθωσαν καθὼς πρότερον, καὶ εἰς τὸν αβγδ κύκλον νοείσθω πολύγωνον ἐγγεγραμμένον. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον. ὥστε τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ κ πρὸς ι. καὶ τὰ ἄλλα κατεσκευασμένα τὸν αὐτὸν τρόπον τοῖς πρότερον. ἕξει ἄρα καὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αβγδ κύκλον, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἡ δὲ πλευρὰ πρὸς τὴν



δ πλευρὰν

πλευρᾶν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κ πρὸς ι. ἕξει οὖν τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἐλάσσονα λόγον ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς τὴν ι. ἡ δὲ κ πρὸς τὴν η μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ κ πρὸς τὴν ι. ὥστε ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον, ἢ ἡ κ πρὸς τὴν η. ἡ δὲ κ πρὸς τὴν η, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ ξ κῶνος πρὸς τὴν σφαῖραν, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ μὲν γὰρ ἐγγεγραμμένον ἔλασσον ἐστὶ τῆς σφαίρας, τὸ δὲ περιγεγραμμένον μεῖζον τοῦ ξ κώνου. οὐκ ἄρα οὐδὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τετραπλασία ἡ σφαῖρα τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῷ αβγδ κύκλῳ. ὕψος δὲ τὴν ἴσην τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων, τετραπλασία ἄρα.

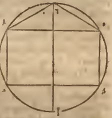
Προδεδειγμένων δὲ τούτων, φανερὸν ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. ὁ μὲν γὰρ κύλινδρος ὁ προειρημένος ἑξαπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὴν αὐτὴν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ σφαῖρα δέδεικται τοῦ αὐτοῦ κώνου τετραπλασία οὖσα. δῆλον οὖν, ὅτι ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας. πάλιν ἐπεὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων ἴση δέδεικται κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου μέση ἀνὰ λόγον ἐστὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου πλευρᾶς, καὶ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. τοῦ δὲ εἰρημένου κυλίνδρου περὶ τὴν σφαῖραν, ἡ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, δῆλον ὅτι ἡ μέση αὐτῶν ἀνὰ λόγον, ἴση γίνεται τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως. ὁ δὲ κύκλος ὁ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσην τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως, τετραπλάσιός ἐστι τῆς βάσεως τῆς τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ἔσται ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου χωρὶς τῶν βάσεων, τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα μετὰ τῶν βάσεων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἑξαπλασία ἔσται τοῦ μεγίστου κύκλου. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία τοῦ μεγίστου κύκλου. ὅλη ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡμιολία ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.



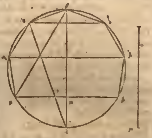
κγ Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος εἰς τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἐν τῷ τμήματι τοῦ μεγίστου κύκλου, καὶ τῆς ἴσης πάσαις ταῖς παραλλήλοις τῇ βάσει τοῦ τμήματος, σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς τοῦ τμήματος βάσεως. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ τμῆμα, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν αη κύκλος. ἐγγεγράφθω σχῆμα εἰς αὐτὸ οἷον εἴρηται, περιεχόμενον ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν. καὶ μέγιστος κύκλος ὁ αηθ. καὶ ἀρτιόπλευρον πολύγωνον τὸ αγεθζδη χωρὶς τῆς αη πλευρᾶς. καὶ εἰλήφθω κύκλος ὁ λ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς αγ πλευρᾶς, καὶ ὑπὸ πασῶν τῶν εζ, γδ. καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς βάσεως, τουτέστι τῆς ακ. δεικτέον οὖν, ὅτι ὁ λ κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. εἰλήφθω γὰρ κύκλος ὁ μ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς εθ πλευρᾶς, καὶ τῆς ἡμισείας

μισείας τῶν ε ζ. γίνεται δὴ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν ε ζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ θ σημεῖον. εἰλήφθω δὲ καὶ ἄλλος ὁ ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ε γ, καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρου τῶν ε ζ, γ δ. ἔσται οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ τὰς ε ζ, γ δ. καὶ ἄλλος ὁμοίως ὁ ξ εἰλήφθω κύκλος. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς α γ καὶ τῆς ἡμισείας συναμφοτέρων τῶν γ δ, α κ. καὶ αὐτὸς οὖν ἴσος ἐστὶ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τοῦ ἐπὶ τὰς α κ, γ δ. πάντες οὖν οἱ κύκλοι ἴσοι ἔσονται τῇ ὅλῃ τοῦ σχήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσον δυνήσονται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς α γ, καὶ τῆς ἴσης ταῖς ε ζ, γ δ. καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως τῇ κ κ. ἐδύνατο δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ λ κύκλου, ἴσον τῷ αὐτῷ χωρίῳ. ὁ ἄρα λ κύκλος ἴσος ἔσται τοῖς μ, ν, ξ κύκλοις. ὥστε καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος.

Τετμήσθω σφαῖρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α ε ζ, τέμνων πρὸς ὀρθὰς τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόγωνον, χωρὶς τῆς βάσεως τῆς α β. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐὰν μενούσης τῆς γ ζ περιενεχθῇ τὸ σχῆμα, αἱ μὲν δ, ε, α, β γωνίαι ἐπὶ κύκλων οἰσθήσονται ὧν διάμετροι αἱ δ ε, α β. αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τμήματος, ἐπὶ κωνικῆς ἐπιφανείας. καὶ ἔσται τὸ γενηθὲν σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, βάσιν μὲν ἔχον κύκλον οὗ διάμετρος ἡ α β, κορυφὴ δὲ τὸ γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον τὴν ἐπιφάνειαν ἐλάσσονα ἕξει, τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τοῦ περιλαμβάνοντος. τὸ γὰρ αὐτὸ πέρας αὐτῶν ἐστιν ἐν ἐπιπέδῳ τοῦ τε τμήματος, καὶ τοῦ σχήματος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου, οὗ διάμετρος ἡ κ β. καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοῖλαι ἀμφότεραι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ περιλαμβάνεται ἡ ἑτέρα ὑπὸ τῆς ἑτέρας.

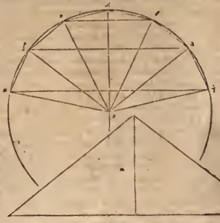


Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἐν τῷ τμήματι τῆς σφαίρας, ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα. καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β ε ζ. καὶ ἔστω τμῆμα ἐν τῇ σφαίρᾳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τὸ εἰρημένον σχῆμα. καὶ ἐν τῷ τμήματι τοῦ κύκλου πολύγωνον, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτά, διαμέτρου μὲν τῆς σφαίρας οὔσης τῆς θ λ. ἐπιζευγμένων δὲ τῶν λ ε, θ α. καὶ ἔστω κύκλος ὁ μ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ α θ. δεικτέον ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ σχήματος ἐπιφανείας. ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος δέδεικται ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ε θ, καὶ τῶν ε ζ, γ δ, κ α. τὸ δὲ ὑπὸ τῆς ε θ, καὶ τῶν ε ζ, γ δ, κ α δέδεικται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ περιεχομένῳ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ε λ, κ θ. ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α θ. καὶ γὰρ τοῦ ὑπὸ λ θ, θ κ, ἴσου ὄντος τῷ ἀπὸ θ α. φανερὸν οὖν ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ὅς ἐστιν ἴσος ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ. δῆλον ἄρα, ὅτι ὁ μ κύκλος μείζων ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχήματος. κε

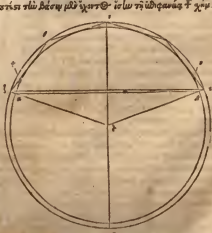


Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμήματι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν τὴν αὐτὴν ἔχοντι τῷ σχήματι, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἴσον ἐστὶ τῷ κώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ α β γ. καὶ κέντρον τὸ ε. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ α β γ τμῆμα πολύγωνον ἀρτιόπλευρον χωρὶς τῆς α γ, ὁμοίως τοῖς πρότερον. καὶ μενούσης τῆς β ε περιενεχθεῖσα ἡ σφαῖρα ποιείτω σχῆμά τι ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν α γ, κῶνος ἀναγεγράφθω κορυφὴν ἔχων τὸ κέντρον. καὶ εἰλήφθω κῶνος ὁ κ, βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ ε κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου κάθετον ἠγμένην. δεικτέον ὅτι ὁ κ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ α ε γ. ἀναγε- κς

γεγράφθωσαν δὲ καὶ κῶνοι ἀπὸ τῶν κύκλων τῶν περὶ διαμέτρους τὰς κθ, ζλ, κορυφὴν ἔχοντες τὸ ε σημεῖον. ἔσται δὴ ὁ μὲν ε β θ ε ῥόμβος στερεὸς ἴσος κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κβθ κώνου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν κβ ἀγομένῃ καθέτῳ. τὸ δὲ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ τὰς κθ, ζλ, καὶ τῆς κωνικῆς τῆς ζ ε λ, κ ε θ ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ τὰς κθ, ζλ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζκ καθέτῳ ἀγομένῃ. πάλιν τὸ περίλειμμα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἐπιφανείας τῆς μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ τὰς ζλ, αγ, καὶ τῆς κωνικῆς τῆς α ε γ, ζ ε λ, ἴσον ἐστὶ κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τῇ μεταξὺ



τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ἐπὶ τὰς ζλ, αγ, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ τὴν ζα καθέτῳ ἀγομένῃ. οἱ οὖν εἰρημένοι κῶνοι ἴσοι ἔσονται τῷ σχήματι, καὶ μετὰ τοῦ αεγ κώνου. καὶ ὕψος μὲν ἴσον ἔχουσι τῇ ἀπὸ τοῦ ε ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἀγομένῃ, τὰς δὲ βάσεις ἴσας τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ αζκβλγ σχήματος. ἔχει δὲ καὶ ὁ κ κῶνος τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ βάσιν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τοῖς εἰρημένοις κώνοις. οἱ δὲ εἰρημένοι κῶνοι ἐδείχθησαν ἴσοι τῷ σχήματι, καὶ τῷ αεγ κώνῳ. καὶ ὁ κ ἄρα κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ τε σχήματι, καὶ τῷ εαγ κώνῳ. ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἀγομένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, μείζων ἐστὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος σὺν τῷ κώνῳ. ὁ γὰρ προειρημένος κῶνος μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ ἴσου τῷ σχήματι, σὺν τῷ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν βάσιν τοῦ τμήματος, τὴν δὲ κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, τουτέστι τὴν βάσιν μὲν ἔχοντος ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ μίαν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου καθέτῳ ἀγομένῃ. ἥ τε γὰρ βάσις τῆς βάσεως μείζων ἐστί. δέδεικται γὰρ τοῦτο, καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὕψους.



κζ Ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγ. καὶ τετμήσθω ἐλάσσονι ἡμικυκλίου ἐπιπέδῳ ἡ αβ. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ ἐπὶ τὰ α β ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δβ. καὶ περὶ τὸ γενηθὲν τμῆμα περιγεγράφθω πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος. ἔστω δὲ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ αβγ κύκλῳ. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς εκ, περιενεχθὲν τὸ πολύγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος ἐπὶ ἐπιφανείας οἰσθήσεται σφαίρας. καὶ αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου κύκλους γράψουσιν, ὧν αἱ διάμετροι ἐπιζευγνύουσι τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, ἴσαι

παράλληλο

παράλληλοι τῇ α β. τὰ δὲ σημεῖα καθ' ἃ ἅπτονται τοῦ ἐλάσσονος κύκλου αἱ τοῦ πολυγώνου πλευραί, κύκλους γράφουσιν ἐν τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ, ὧν διάμετροι ἔσονται αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰς ἁφάς, παράλληλοι οὖσαι τῇ α β. αἱ δὲ πλευραὶ ἐπὶ κωνικῶν ἐπιφανειῶν οἰσθήσονται. καὶ ἔσται τὸ περιγεγραφὲν σχῆμα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενον, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν ζ η κύκλος. ἡ δὲ τοῦ εἰρημένου σχήματος ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ἐπιφανείας, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν α β κύκλος. ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι αἱ α μ, β ν. ἐπὶ κωνικῆς ἄρα ἐπιφανείας οἰσθήσονται, καὶ τὸ σχῆμα τὸ γενόμενον ὑπὸ τοῦ πολυγώνου τοῦ α μ, θ ε ν β ἕξει μείζονα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλος ἐστί. πέρας γὰρ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ὄντα ἔχουσιν τὸν περὶ διάμετρον τὴν α β κύκλον. καὶ περιλαμβάνεται τὸ τμῆμα ὑπὸ τοῦ σχήματος. ἀλλ' ἡ γεγενημένη ὑπὸ τῶν ζ μ, η ν ἐπιφάνεια κώνου, μείζων ἐστὶ τῆς γεγενημένης ὑπὸ τῶν μ α, ν β. ἡ μὲν γὰρ ζ μ τῆς μ α μείζων ἐστί. ὑπὸ γὰρ ὀρθὴν ὑποτείνει. ἡ δὲ ν η τῆς ν β. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, μείζων ἐστὶν ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας. ταῦτα γὰρ δέδεικται ἐν τοῖς λήμμασι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ τμήματος ἐπιφανείας τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος τοῦ περὶ τὸν τομέα, ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου δύναται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν πασῶν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου, καὶ τῆς ἐπὶ ἡμισείας τῆς βάσεως τοῦ εἰρημένου πολυγώνου. τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆμα τῆς μείζονος σφαίρας. τοῦτο δὲ δῆλον, διὰ τὸ προγεγραμμένον.

Τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος τῷ τομεῖ, ἡ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἠγμένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. κα

ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ μέγιστος κύκλος ἐπ' αὐτῆς ὁ α β γ δ. καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ περὶ τὸν τομέα περιγεγράφθω τὸ λ κ ζ πολύγωνον, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος περιγεγράφθω. καὶ γεγενήσθω σχῆμα, καθάπερ πρότερον. καὶ ἔστω κύκλος ὁ ν, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς κ λ. ἀλλὰ τὸ εἰρημένον χωρίον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς μ θ καὶ ζ η. ὃ δή ἐστιν ὕψος τοῦ τμήματος τῆς μείζονος σφαίρας. τοῦτο γὰρ προδέδεικται. τοῦ ἄρα ν κύκλου ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ μ θ, η ζ περιεχομένῳ. ἀλλ' ἡ μὲν η ζ μείζων ἐστὶ τῆς δ ξ, ὅ ἐστιν ὕψος τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὴν κ ζ, ἔσται παράλληλος τῇ δ α. ἔστι δὲ καὶ ἡ α β τῇ κ λ παράλληλος. καὶ κοινὴ ἡ ζ ε. ὅμοιον ἄρα τὸ ζ κ θ τρίγωνον, τῷ δ α ξ τριγώνῳ. καὶ ἔστι μείζων ἡ ζ κ τῆς α δ. μείζων ἄρα καὶ ἡ ζ η τῆς δ ξ. ἴση δὲ ἡ μ θ τῇ διαμέτρῳ τῇ γ δ. ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ε κ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν μ ο τῇ ο ζ, ἡ δὲ θ ε τῇ ε ζ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ε ο τῇ μ θ. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ μ θ τῆς ε ο. ἀλλὰ καὶ ἡ γ δ διπλασία ἐστὶ τῆς ε ο. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μ θ τῇ γ δ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν γ δ, δ ξ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς α δ. ἡ ἄρα τοῦ σχήματος τοῦ κ ζ λ ἐπιφάνεια μείζων ἐστὶ τοῦ κύκλου, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τοῦ περὶ διάμετρον τὴν α β. ὁ γὰρ ν κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν τομέα σχήματος.



Γίνεται δὲ καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸν τομέα σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν κ λ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον, ἴσον κώνῳ, οὗ ἡ μὲν βάσις ἴση ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος, ὕψος δὲ τῇ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν πλευρὰν καθέτῳ ἠγμένῃ, ἣ δὴ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. τὸ γὰρ περιγεγραμμένον σχῆμα τῷ τομεῖ, ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς τὸ τμῆ- κβ

μα τῆς μείζονος σφαίρας, ἧς κέντρον ἐστὶ τὸ αὐτό. δῆλον οὖν τὸ λεγόμενον ἐστὶν ἐκ τοῦ περιγεγραμμένου. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ μεῖζον ἐστὶ κώνου τὴν βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ὁ γὰρ ἴσος κῶνος τῷ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ τὴν μὲν βάσιν μείζονα ἔχει τοῦ εἰρημένου κύκλου, τὸ δὲ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἔστω πάλιν σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ τμῆμα ἔλασσον ἡμικυκλίου τὸ αβγ. καὶ κέντρον τὸ δ. καὶ εἰς τὸν αβγ τομέα ἐγγεγράφθω πολύγωνον ἀρτιόγωνον, καὶ τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω, καὶ παράλληλοι ἔστωσαν αἱ πλευραὶ ταῖς πλευραῖς. καὶ κύκλος περιγεγράφθω περὶ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον μενούσης τῆς ηβ περιενεχθέντες οἱ κύκλοι, ποιείτωσαν σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, δεικτέον ὅτι ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνειαν, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ πλευρὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. τὸ δὲ σχῆμα σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ. ἔστω γὰρ ὁ μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας, καὶ ἔτι τῆς ἡμισείας τῆς εζ.

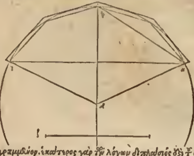


ἔσται δὴ ὁ μ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, εἰλήφθω δὴ καὶ ὁ μ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, καὶ πασῶν τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς γωνίας σὺν τῇ ἡμισείᾳ τῆς αγ. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ἀλλὰ τὰ εἰρημένα χωρία ἐστὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς εκ πλευρᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αλ πλευρᾶς. καὶ ὡς ἄρα τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν ν κύκλον. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εκ πρὸς τὴν αλ. τὸν δὲ αὐτόν, ὃν καὶ τὸ πολύγωνον. ἔστω πάλιν κῶνος ὁ ξ, βάσιν μὲν ἔχων τῷ μ ἴσην, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἴσος δὴ οὗτος ἐστὶν ὁ κῶνος τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν εζ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ. καὶ ἔστω ἄλλος κῶνος ὁ ο, βάσιν μὲν ἴσην ἔχων τῷ ν. ὕψος δὲ τὴν ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὴν αλ, κάθετον ἠγμένην. ἔσται δὴ καὶ οὗτος ἴσος τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι σὺν τῷ κώνῳ, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν αγ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ δ κέντρον. ταῦτα γὰρ πάντα προγέγραπται. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, ὡς ἡ αλ πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ δ, ἐπὶ τὴν αλ κάθετον ἠγμένην. ἐδείχθη δὲ ὡς ἡ εκ πρὸς τὴν αλ, οὕτως ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. καὶ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. ἔσται ἄρα ὡς ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ξ, πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ ο. οὕτως τὸ ὕψος τοῦ ξ κώνου, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ο κώνου. ὅμοιοι εἰσὶν οἱ κῶνοι. ὁ ξ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ο κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εκ πρὸς αλ.

μ Παντὸς τμήματος σφαίρας, ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας. ἔστω σφαῖρα, καὶ μέγιστος ἐν αὐτῇ κύκλος ὁ αβγ. καὶ τμῆμα ἐν αὐτῇ ἔλασσον ἡμισφαιρίου, οὗ βάσις ὁ περὶ τὴν αγ κύκλος, πρὸς ὀρθὰς ὢν τῷ αβγ κύκλῳ. καὶ εἰλήφθω

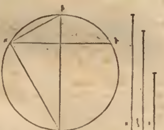
κύκλος

κύκλος ὁ ζ. οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β. δεικτέον ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ α β γ τμήματος, ἴση ἐστὶ τῷ ζ κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. καὶ εἰλήφθω τὸ δ κέντρον. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὰ α, γ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν. καὶ δύο μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων τῆς τε ἐπιφανείας τοῦ τμήματος, καὶ τοῦ ζ κύκλου, ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α β γ τομέα πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιογώνιον, καὶ ἄλλο τούτῳ ὅμοιον περιγεγράφθω. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸν κύκλον. περιενεχθέντος δὲ τοῦ κύκλου ὡς καὶ πρότερον, ἔσται δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. ὧν τὸ μὲν περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον. καὶ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἔσται ὡς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον. ἑκάτερος γὰρ τῶν λόγων διπλασίων ἐστὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πλευρά, πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου πλευράν. ἀλλὰ τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ εἰρημένου τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὸν ζ κύκλον. μείζων δέ ἐστιν ἡ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια τῆς ἐπιφανείας τοῦ τμήματος. καὶ ἡ τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐπιφάνεια ἄρα μείζων ἐστὶ τοῦ ζ κύκλου, ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἡ εἰρημένη τοῦ σχήματος ἐπιφάνεια ἐλάσσων οὖσα τοῦ τηλικούτου κύκλου. ἔστω πάλιν ὁ κύκλος μείζων τῆς ἐπιφανείας. καὶ ὁμοίως περιγεγράφθω καὶ ἐγγεγράφθω ὅμοια πολύγωνα. καὶ τὸ περιγεγραμμένον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ὁ κύκλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχήματος. οὐκ ἄρα μείζων ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζ κύκλου. ἐδείχθη δὲ ὡς οὐδὲ ἐλάσσων, ἴση ἄρα.



Ἐὰν μεῖζον ἡμισφαιρίου ᾖ τμῆμα, ὁμοίως αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἠγμένῃ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. μα

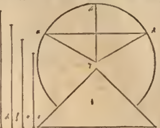
ἔστω γὰρ σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος, καὶ νοείσθω τετμημένη ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, τῷ κατὰ τὴν α δ. καὶ τὸ α β δ ἔλασσον ἔστω ἡμισφαιρίου. καὶ διάμετρος ἡ β γ πρὸς ὀρθὰς τῇ α δ. καὶ ἀπὸ τῶν β, γ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθωσαν αἱ β α, α γ. καὶ ἔστω ὁ μὲν ε κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α β. ὁ δὲ ζ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α γ. ὁ δὲ η κύκλος οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ γ β, καὶ ὁ η κύκλος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς δυσὶ κύκλοις τοῖς ε, ζ. ὁ δὲ η κύκλος ἴσος ἐστὶν ὅλῃ τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἐπειδήπερ ἑκατέρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β γ κύκλου. ὁ δὲ ε κύκλος ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ α β δ τμήματος. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐλάσσονος ἡμισφαιρίου. λοιπὸς ἄρα ὁ ζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ τοῦ α γ δ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ὃ δή ἐστι μεῖζον ἡμισφαιρίου.



Παντὶ τομεῖ σφαίρας, ἴσος ἐστὶ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ κατὰ τὸν τομέα, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. μβ

ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ α β δ, καὶ κέντρον τὸ γ. καὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν ἴσον τῇ κατὰ τὴν α β δ περιφέρειαν ἐπιφανείᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ β γ. δεικτέον ὅτι ὁ τομεὺς ὁ α β γ δ ἴσος ἐστὶ τῷ εἰρημένῳ κώνῳ. εἰ γὰρ μή, ἔστω μείζων ὁ τομεὺς τοῦ κώνου. καὶ κείσθω ὁ θ κῶνος, οἷος εἴρηται. δύο δὴ μεγεθῶν ἀνίσων ὄντων, τοῦ τομέως καὶ τοῦ θ κώνου, εὑρήσθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ δ, ε. μείζων δὲ ἡ δ τῆς ε, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἡ δ πρὸς ε, ἤπερ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον, καὶ εἰλήφθωσαν δύο γραμμαὶ αἱ ζ, η. ὅπως τῷ ἴσῳ ὑπερέχῃ ἡ δ τῆς ζ, καὶ ἡ ζ τῆς η, καὶ ἡ η τῆς ε. καὶ περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα τοῦ κύκλου περιγεγράφθω πολύγωνον

γωνον ἰσόπλευρον, καὶ ἀρτιογώνιον. καὶ τούτῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθαι. ὥσπερ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου πλευρὰ ἐλάσσονα λόγον ἔχει πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ζ. καὶ ὁμοίως τοῖς πρότερον περιενεχθέντος τοῦ κύκλου, γεγενήσθω δύο σχήματα ὑπὸ κωνικῶν ἐπιφανειῶν περιεχόμενα. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον, σὺν τῷ κώνῳ τῷ κορυφὴν ἔχοντι τὸ γ σημεῖον, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σὺν τῷ κώνῳ τριπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου. ἀλλὰ ἡ τοῦ περιγεγραμμένου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δ πρὸς ζ. ἐλάσσονα λόγον ἄρα ἕξει, ἢ τριπλάσιον, τὸ εἰρημένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. ἡ δὲ δ πρὸς ε μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τριπλάσιον τοῦ τῆς δ πρὸς ζ. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον σχῆμα στερεὸν τῷ τομεῖ, πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς ε. ἡ δὲ δ πρὸς ε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. τὸ ἄρα περιγεγραμμένον τῷ τομεῖ σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὁ στερεὸς τομεὺς πρὸς τὸν θ κῶνον. καὶ



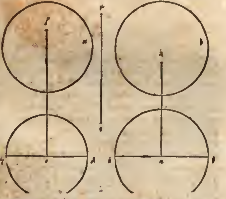
ἐναλλάξ. μεῖζον δὲ ἐστὶ τὸ περιγεγραμμένον στερεὸν σχῆμα τοῦ τμήματος. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον ἄρα σχῆμα ἐν τῷ τομεῖ, μεῖζόν ἐστι τοῦ θ κώνου. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς ἄνω, ἔλασσον ὂν τοῦ τηλικούτου κώνου, τουτέστι τοῦ ἔχοντος βάσιν μὲν κύκλον, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἐπιζευγνυμένῃ εὐθείᾳ τοῦ κύκλου, ὅς ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ εἰρημένος κῶνος ὁ θ. βάσιν τε γὰρ ἔχει κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος, τουτέστι τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ, καὶ ὕψος ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. οὐκ ἄρα ὁ στερεὸς τομεὺς μείζων ἐστὶ τοῦ θ κώνου. ἔστω δὲ πάλιν ὁ θ κῶνος τοῦ στερεοῦ τομέος μείζων. πάλιν δὲ ὁμοίως ἡ δ πρὸς τὴν ε μείζων αὐτῆς οὖσα, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω τοῦ ὃν ἔχει ὁ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. καὶ ὁμοίως εἰλήφθωσαν αἱ ζ, η. ὥστε εἶναι τὰς δύο πλευρὰς τὰς αὐτάς, καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ἐπίπεδον τομέα πολυγώνου ἀρτιογωνίου ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω, τοῦ ὃν ἔχει ἡ δ πρὸς τὴν ζ. καὶ γεγενήσθω τὰ περὶ τὸν στερεὸν τομέα στερεὰ σχήματα. ὁμοίως οὖν δείξομεν, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν τομέα στερεὸν σχῆμα πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἡ δ πρὸς ε. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ὁ θ κῶνος πρὸς τὸν τομέα. ὥστε καὶ ὁ τομεὺς πρὸς τὸν κῶνον ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἐγγεγραμμένον στερεὸν ἐν τῷ τμήματι πρὸς τὸ περιγεγραμμένον. μείζων δὲ ἐστὶν ὁ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτὸν σχήματος. μείζων ἄρα ὁ θ κῶνος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. ὅπερ ἀδύνατον. δέδεικται γὰρ τοῦτο, ὅτι ὁ τηλικοῦτος κῶνος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος περὶ τὸν τομέα. ἴσος ἄρα ὁ τομεὺς τῷ θ κώνῳ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΝ Β.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΧΑΙΡΕΙΝ.

Πρότερον μὲν ἐπέστειλάς μοι γράψαι τῶν προβλημάτων τὰς ἀποδείξιας, ὧν αὐτὸς τὰς προτάσεις ἀπέστειλα Κόνωνι. συμβαίνει δὲ αὐτῶν τὰ πλεῖστα γράφεσθαι διὰ τῶν θεωρημάτων, ὧν πρότερον ἀπέστειλά σοι τὰς ἀποδείξιας. ὅτι τε πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, καὶ διὰ ὅτι παντὸς τμήματος σφαίρας τῇ ἐπιφανείᾳ ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ εὐθείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένῃ. καὶ διότι πάσης σφαίρας ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, αὐτός τε ἡμιόλιός ἐστι κατὰ μέγεθος τῆς σφαίρας, καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἡμιόλια τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. καὶ διότι πᾶς τομεὺς στερεὸς ἴσος ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας τοῦ ἐν τῷ τομεῖ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ὅσα μὲν οὖν τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων γράφεται διὰ τῶν θεωρημάτων, ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας ἀπέσταλκά σοι. ὅσα δὲ δι᾽ ἄλλης εὑρίσκονται θεωρίας, τά τε περὶ ἑλίκων καὶ τὰ περὶ τῶν κωνοειδῶν, πειράσομαι διὰ τάχους ἀποστεῖλαι. τὸ δὲ πρῶτον ἦν τῶν προβλημάτων, τόδε· σφαίρας δοθείσης ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν, ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας. ἔστι δὲ τοῦτο φανερόν, δεδειγμένον ἐκ τῶν προειρημένων θεωρημάτων. τὸ γὰρ τετραπλάσιον τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ἐπίπεδόν τε χωρίον ἐστί, καὶ ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας.

Τὸ δεύτερον ἦν κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου σφαῖραν εὑρεῖν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ ἴσην. ἔστω ὁ δεδομένος κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ α, καὶ τῷ α ἴση ἡ β σφαῖρα. καὶ κείσθω τοῦ α κώνου ἢ κυλίνδρου ἡμιόλιος κύλινδρος ὁ γζδ. τῆς δὲ β σφαίρας ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν κθ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ διαμέτρῳ τῆς β σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. τῶν δὲ ἴσων κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὡς ἄρα ὁ ε κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κθ, οὕτως ἡ κλ πρὸς εζ. ἴση δὲ ἡ κλ τῇ κθ. ὁ γὰρ ἡμιόλιος κύλινδρος τῆς σφαίρας ἴσον ἔχει τὸν ἄξονα τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας. καὶ ὁ κ κύκλος μέγιστός ἐστι τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ κθ, οὕτως ἡ κθ πρὸς τὴν εζ. ἔστω τῷ ἀπὸ κθ ἴσον τῷ ὑπὸ γδ, μν. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, οὕτως τὸ ἀπὸ γδ πρὸς τὸ ἀπὸ κθ. τουτέστιν ἡ κθ πρὸς εζ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ γδ πρὸς τὴν κθ, οὕτως ἡ κθ πρὸς τὴν μν, καὶ ἡ μν πρὸς εζ. καί ἐστι δοθεῖσα ἑκατέρα τῶν γδ, εζ. δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν γδ, εζ, δύο μέσαι ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ κθ, μν. δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν κθ, μν, συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω δὴ ὁ δοθεὶς κῶνος

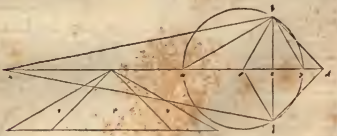


ἢ κύλινδρος ὁ α. δεῖ δὴ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ἴσην σφαῖραν εὑρεῖν. ἔστω τοῦ α κώνου, ἢ κυλίνδρου, ἡμιόλιος κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν γδ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ εζ. καὶ εἰλήφθω τῶν γδ, εζ δύο μέσαι ἀνὰ λόγον, αἱ κθ, μν. ὥστε εἶναι ὡς τὴν γδ πρὸς τὴν κθ, οὕτω τὴν κθ πρὸς τὴν μν, καὶ τὴν μν πρὸς τὴν εζ. καὶ νοείσθω κύλινδρος, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὴν κθ κύκλος. ἄξων δὲ ὁ κλ ἴσος τῇ κθ διαμέτρῳ. λέγω δὴ ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ε κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ γδ πρὸς κθ, ἡ μν πρὸς εζ. καὶ ἐναλλάξ, καὶ ἴση ἡ κθ τῇ κλ. ὡς ἄρα ἡ γδ πρὸς μν, του-

τέστιν

τέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς γδ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θ, οὕτως ὁ ι κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. ὡς ἄρα ὁ ι κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον, οὕτως ἡ κλ πρὸς τὴν ιζ. τῶν ἄρα ι, κ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν. ἴσος ἄρα ὁ ι κύλινδρος τῷ κ κυλίνδρῳ. ὁ δὲ κ κύλινδρος τῆς σφαίρας, ἧς διάμετρος ἡ κθ, ἡμιόλιός ἐστι. καὶ ἡ σφαῖρα ἄρα ἧς ἡ διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ κθ, τουτέστιν ἡ β, ἴση ἐστὶ τῷ α κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ.

β Παντὶ τμήματι τῆς σφαίρας ἴσος ἐστὶ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, ὕψος δὲ εὐθεῖαν, ἥτις πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τμήματος τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος, πρὸς τὸ ὕψος τοῦ λοιποῦ τμήματος. ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος οὗ διάμετρος ἡ αγ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ σφαῖρα, τῷ διὰ τῆς βζ πρὸς ὀρθὰς τῇ αγ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ. καὶ πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θα, αε, πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ δε πρὸς γε. καὶ πάλιν πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ θγ, γε πρὸς γε, οὕτως ἡ κε πρὸς εα. καὶ ἀναγεγράφθωσαν κῶνοι ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν βζ, κορυφὰς ἔχοντες τὰ κ, δ σημεῖα. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν βδζ κῶνος, τῷ κατὰ τὸ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ βκζ τῷ κατὰ τὸ α σημεῖον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βθ, θζ, καὶ νενοήσθω κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. κορυφὴν δὲ τὸ θ σημεῖον. καὶ ἔστω κῶνος ὁ μ, βάσιν μὲν ἔχων κύκλον ἴσον τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ βγζ τμήματος τῆς σφαίρας. τουτέστιν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ βγ. ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἔσται δὴ ὁ μ κῶνος ἴσος τῷ βγθζ στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς ἡ δε πρὸς εγ, οὕτω συναμφότερος ἡ θα, αε. πρὸς αε διελόντι ἔσται ὡς ἡ γδ πρὸς γε, οὕτως ἡ θα πρὸς αε, τουτέστιν ἡ γθ πρὸς αε. καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ δγ πρὸς

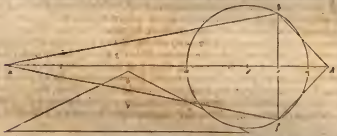


γθ ἐστὶν, οὕτως ἡ γε πρὸς εα. καὶ συνθέντι, ὡς ἡ θδ πρὸς θγ, ἡ γα πρὸς αε, τουτέστι τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς γθ, τὸ ἀπὸ γβ πρὸς τὸ ἀπὸ βε. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ γβ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μ κύκλου. ἡ δὲ βε ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ περὶ διάμετρον τῆς βζ κύκλου. ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς θγ, ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον. καὶ ἔστιν ἴση ἡ θγ τῷ ἄξονι τοῦ μ κώνου. καὶ ὡς ἄρα ἡ δθ πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μ κώνου, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ κῶνος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν μ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς λήμμασι τοῦ πρώτου βιβλίου δέδεικται. ἢ οὕτως, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ δθ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ μ κώνου, οὕτως ὁ μ κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ἴσος ἄρα ὁ μ κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλον, ὕψος δὲ ἡ δθ. ἀντιπεπόνθασι γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ' ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον τῆς βζ κύκλον, ὕψος δὲ τὴν δθ. ἴσος ἐστὶ τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. ἀλλ' ὁ μ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ βγζθ στερεῷ τομεῖ, καὶ ὁ βγζθ στερεὸς τομεὺς ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ βδζθ στερεῷ ῥόμβῳ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ κώνου, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ εθ, λοιπὸς ἄρα ὁ βδζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ βζγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ὁ βκζ κῶνος, ἴσος τῷ βαζ τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς συναμφότερος, ἡ θγ, γε πρὸς γε, οὕτως ἡ κε πρὸς εα. διελόντι ἄρα ὡς ἡ κα πρὸς αε, οὕτως ἡ θγ πρὸς γε. ἴση δὲ ἡ θγ τῇ θα. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ κα πρὸς αθ, οὕτως ἡ αε πρὸς εγ. ὥστε καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κθ πρὸς θα, ἡ αγ πρὸς γε, τουτέστι τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ βε. κείσθω δὴ πάλιν κύκλος ὁ ν, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ αβ. ὁ ἄρα ν κύκλος ἴσος

ἔσται

ἔσται τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ β α ζ τμήματος. καὶ νοείσθω ὁ κῶνος ὁ ν, ἴσην ἔχων τὸ ὕψος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἴσος ἄρα ἐστὶ τῷ β θ ζ α στερεῷ τομεῖ. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ κ θ πρὸς θ α, οὕτως τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ β ε, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλου, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον. ἴση δὲ ἡ α θ τῷ ὕψει τοῦ ν κώνου. ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κώνου, οὕτως ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ὁ β θ ζ α τομεὺς τῷ β θ ζ κ σχήματι. κοινὸς προσκείσθω ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὴν β ζ κύκλος, ὕψος δὲ ἡ ε θ. ὅλον ἄρα τὸ α β ζ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ β ζ κ κώνῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ φανερὸν ὅτι γίγνεται καθόλου τμῆμα σφαίρας πρὸς κῶνον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι. καὶ ὕψος ἴσον ὡς συναμφότερος, ἥ τε ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ κάθετος τοῦ λοιποῦ τμήματος πρὸς τὴν κάθετον τοῦ λοιποῦ τμήματος. ὡς γὰρ ἡ δ ε πρὸς ε γ, οὕτως ὁ δ ζ β κῶνος, τουτέστι τὸ β γ ζ τμῆμα πρὸς τὸν β γ ζ κῶνον.

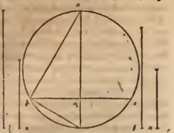
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δείξομεν ὅτι καὶ ὁ κ β ζ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ α ζ β τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω γὰρ ὁ ν κῶνος βάσιν μὲν ἔχων τὴν ἴσην τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ κῶνος τῇ σφαίρᾳ. ἡ γὰρ σφαῖρα δέδεικται τετραπλασία τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, καὶ ὕψος τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ν κῶνος τοῦ αὐτοῦ ἐστὶ τετραπλάσιος. ἐπεὶ καὶ ἡ βάσις τῆς βάσεως, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τοῦ μεγίστου κύκλου τοῦ ἐν αὐτῇ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ θ α, α ε πρὸς α ε, ἡ δ ε πρὸς ε γ. διελόντι καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ θ γ πρὸς γ δ, ἡ α ε πρὸς ε γ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ κ ε πρὸς ε α, συναμφότερος ἡ θ γ ε πρὸς γ ε. διελόντι καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ἡ κ α πρὸς γ θ, τουτέστι πρὸς θ α, οὕτως ἡ α ε πρὸς ε γ. τουτέστιν ἡ θ γ πρὸς γ δ. καὶ συνθέντι, ἴση δὲ ἡ α θ τῇ θ γ, ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς δ γ. καὶ ὅλη ἡ κ δ πρὸς δ θ. ἐστὶν ὡς ἡ δ θ πρὸς δ γ. τουτέστιν ὡς ἡ κ θ



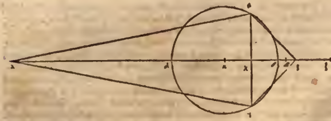
πρὸς θ α. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ δ θ κ, θ α τῷ ὑπὸ τῶν δ κ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ κ θ πρὸς θ γ, ἡ θ δ πρὸς γ δ, ἐναλλὰξ ὡς ἡ κ θ πρὸς θ δ, ἡ θ γ πρὸς γ δ. ὡς δὲ ἡ θ γ πρὸς γ δ, ἐδείχθη ἡ α ε πρὸς ε γ, ὡς ἄρα ἡ κ θ πρὸς θ δ, ἡ α ε πρὸς ε γ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ δ πρὸς τὸ ὑπὸ κ θ δ. τὸ ἀπὸ α γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν α ε γ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν κ θ δ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ κ δ, α θ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κ δ, α θ, τουτέστιν ἡ κ δ πρὸς α θ. τὸ ἀπὸ α γ πρὸς τὸ ὑπὸ α ε γ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ε β. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ α γ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ν κύκλου πρὸς τὸ ἀπὸ β ε, τουτέστιν ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, οὕτως ἡ κ δ πρὸς α θ. τουτέστιν ἡ κ δ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα τῷ β δ ζ κ στερεῷ ῥόμβῳ. ἢ οὕτως ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ν κύκλος πρὸς τὸν περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλον, οὕτως ἡ κ δ πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ν κώνου. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ν κῶνος τῷ κώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ περὶ διάμετρον τὴν β ζ κύκλος. ὕψος δὲ ἡ δ κ. ἀντιπεπόνθασιν γὰρ αὐτῶν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλ' οὗτος ὁ κῶνος ἴσος ἐστὶ τῷ β κ ζ δ στερεῷ ῥόμβῳ. καὶ ὁ ν ἄρα κῶνος, τουτέστιν ἡ σφαῖρα ἴση ἐστὶ τῷ β ζ κ δ στερεῷ ῥόμβῳ, ὧν ὁ β δ ζ κῶνος ἴσος ἐδείχθη τῷ β γ ζ τμήματι τῆς σφαίρας. λοιπὸς ἄρα ὁ β κ ζ κῶνος, ἴσος ἐστὶ τῷ β α ζ τμήματι τῆς σφαίρας.

Τρίτον ἦν πρόβλημα τόδε. τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰς τῶν τμημάτων ἐπιφανείας πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω, καὶ ἔστω τῆς σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ α δ β ε, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ α β. καὶ ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν α β ἐπίπε- γ

διαν ὀρθόν. καὶ ποιείτω τὸ ἐπίπεδον ἐν τῷ περὶ τὸ α δ β κύκλῳ τομὴν τὴν δ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, β δ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ δ α ε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δ β ε τμήματος. ἀλλὰ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ α ε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ α δ. τῇ δὲ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ β ε τμήματος ἴσος ἐστὶ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δ β. ὡς δὲ οἱ εἰρημένοι κύκλοι πρὸς ἀλλήλους, οὕτως τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ β. τουτέστιν ἡ α γ πρὸς γ β. λόγος ἄρα τῆς α γ πρὸς γ β δοθείς, ὥστε δοθέν ἐστι τὸ γ σημεῖον. καὶ ἔστι τῇ α β πρὸς ὀρθὰς ἡ δ ε. θέσει ἄρα καὶ τὸ διὰ τῆς δ ε ἐπίπεδον. συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ α β δ, καὶ διάμετρος ἡ α β. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ζ πρὸς η. καὶ τετμήσθω ἡ α β, κατὰ τὸ γ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν α γ πρὸς β γ, οὕτως τὴν ζ πρὸς η. καὶ διὰ τοῦ γ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ σφαῖρα πρὸς ὀρθὰς τῇ α β, εὐθείᾳ. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ ἡ δ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, δ β. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο κύκλοι οἱ θ, κ, ὁ μὲν θ ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ α δ, ὁ δὲ κ τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσην ἔχων τῇ δ β. ἔστιν ἄρα ὁ μὲν θ κύκλος ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δ α ε τμήματος. ὁ δὲ κ τοῦ δ β ε τμήματος. τοῦτο γὰρ προδέδεικται ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ α δ β, καὶ κάθετος ἡ γ δ. ἔστιν ὡς ἡ α γ πρὸς γ β, τουτέστιν ἡ ζ πρὸς η, τὸ ἀπὸ α δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ β. τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ θ κύκλου, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κ κύκλου. τουτέστιν ὁ θ κύκλος πρὸς τὸν κ κύκλον. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δ α ε τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δ β ε τμήματος τῆς σφαίρας.



δ Τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν τεμεῖν, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα ἡ α β γ δ. δεῖ δὴ αὐτὴν τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὰ τμήματα τῆς σφαίρας πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχειν τὸν δοθέντα. τετμήσθω διὰ τῆς α γ ἐπιπέδῳ, λόγος ἄρα τοῦ α δ γ τμήματος τῆς σφαίρας πρὸς τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας δοθείς. τετμήσθω δὲ ἡ σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω ἡ τομὴ μέγιστος κύκλος ὁ α β γ δ. κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ διάμετρος ἡ δ β. καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κ δ χ πρὸς δ χ, οὕτως ἡ ρ χ πρὸς χ β. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κ β χ πρὸς β χ, οὕτως ἡ λ χ πρὸς χ δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α λ, λ γ, α ρ, ρ γ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν α λ γ κῶνος, τῷ α δ γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ α ρ γ, τῷ α β γ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ α λ γ κώνου πρὸς τὸν α ρ γ κῶνον δοθείς. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ἡ λ χ πρὸς χ ρ. ἐπείπερ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχουσι τὸν περὶ διάμετρον τὴν α γ κύκλον. λόγος ἄρα καὶ τῆς λ χ πρὸς χ ρ δοθείς. καὶ διὰ ταῦτα τοῖς πρότερον διὰ τῆς κατασκευῆς, ὡς ἡ λ δ πρὸς κ δ, ἡ κ β πρὸς β ρ,

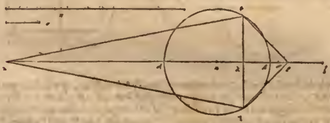


καὶ ἡ δ χ πρὸς χ β. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ρ β πρὸς β κ, ἡ κ δ πρὸς λ δ. συνθέντι ὡς ἡ ρ κ πρὸς κ β, τουτέστι πρὸς κ δ, οὕτως ἡ κ λ πρὸς λ δ. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ρ λ πρὸς ὅλην τὴν κ λ ἐστίν, ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ρ λ δ, τῷ ἀπὸ λ κ. ὡς ἄρα ἡ ρ λ πρὸς λ δ, τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ λ δ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ λ δ πρὸς δ κ, οὕτως ἡ δ χ πρὸς χ β. ἔσται ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι, ὡς ἡ κ λ πρὸς λ δ, οὕτως ἡ β δ πρὸς δ χ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ κ λ πρὸς τὸ ἀπὸ λ δ, οὕτω τὸ ἀπὸ β δ πρὸς τὸ ἀπὸ δ χ.

πάλιν

πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ λχ πρὸς δχ, συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ. διελόντι, ὡς ἡ λδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ κβ πρὸς βχ. καὶ κείσθω τῇ κβ ἴση ἡ βζ. ὅτι γὰρ ἐκτὸς τοῦ ρ πεσεῖται, δῆλον. καὶ ἔσται ὡς ἡ λδ πρὸς δχ, οὕτως ἡ ζβ πρὸς βχ. ὥστε καὶ ὡς ἡ δλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζχ. ἐπεὶ δὲ λόγος ἐστὶ τῆς δλ πρὸς λχ δοθείς, καὶ τῆς ρλ ἄρα πρὸς λχ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ρλ πρὸς λδ, καὶ ἡ δλ πρὸς λχ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ δβ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. ὁ ἄρα τῆς ρλ πρὸς λχ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. πεποιήσθω δὲ ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, ἡ βζ πρὸς ζθ. λόγος δὲ τῆς ρλ πρὸς λχ δοθείς, λόγος ἄρα καὶ τῆς ζβ πρὸς ζθ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ βζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ζθ, καὶ ὁ τῆς βζ ἄρα λόγος πρὸς ζθ σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, καὶ ἡ βζ πρὸς ζχ. ἀλλ' ὁ βζ πρὸς ζθ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς βζ πρὸς ζχ, καὶ τοῦ τῆς ζχ πρὸς ζθ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς βζ πρὸς ζχ, λοιπὸς ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ βδ, τουτέστι δοθὲν πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ, τουτέστι πρὸς δοθεῖσαν. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ζδ. δοθεῖσαν ἄρα δοθεῖσαν τὴν δζ. τεμεῖν δεῖ κατὰ τὸ χ, καὶ ποιεῖν ὡς τὴν χζ πρὸς δοθεῖσαν τὴν ζθ, οὕτως τὸ δοθὲν τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. τοῦτο οὕτως ἁπλῶς μὲν λεγόμενον ἔχει διορισμόν. προστιθεμένων δὲ τῶν προβλημάτων, τῶν ἐνθάδε ὑπαρχόντων, τουτέστι τοῦ τε διπλασίαν εἶναι τὴν δβ τῆς βζ, καὶ τοῦ μείζονα τὴν ζθ τῆς βθ, ὡς κατὰ τὴν ἀνάλυσιν, οὐκ ἔχει διορισμόν. καὶ ἔσται τὸ πρόβλημα τοιοῦτον. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν δβ, βζ, καὶ διπλασίας οὔσης τῆς δβ τῆς βζ, καὶ σημείου ἐπὶ τῆς βζ τοῦ θ, τεμεῖν τὴν δβ κατὰ τὸ χ. καὶ ποιεῖν ὡς τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τὴν χζ πρὸς ζθ. ἑκάτερα δὲ ταῦτα ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεταί τε καὶ συντεθήσεται.

Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς π πρὸς σ, μείζων πρὸς ἐλάσσονα. καὶ δεδόσθω τις σφαῖρα. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστω τομὴ ὁ αβγδ κύκλος, καὶ διάμετρος ἔστω ἡ βδ, κέντρον δὲ τὸ κ. καὶ τῇ κβ ἴση κείσθω ἡ βζ, καὶ τετμήσθω ἡ βζ κατὰ τὸ θ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν θζ πρὸς θβ, τὴν π πρὸς σ. καὶ ἔτι τετμήσθω ἡ βδ κατὰ τὸ χ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν χζ πρὸς θζ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ διὰ τοῦ χ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν πρὸς τὴν βδ. λέγω ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν, ὥστε εἶναι ὡς τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, τὴν π πρὸς σ. πεποιήσθω γὰρ ὡς μὲν συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς

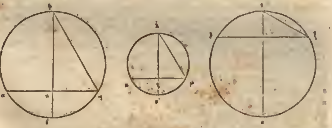


δχ, ὡς δὲ συναμφότερος ἡ κδ, δχ πρὸς χδ, ἡ ρχ πρὸς χβ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αλ, λγ, αρ, ργ. ἔσται δὴ διὰ τὴν κατασκευὴν ὡς ἐδείξαμεν ἐν τῇ ἀναλύσει, ἴσον τὸ ὑπὸ ρλ, λδ τῷ ὑπὸ λκ. καὶ ὡς ἡ κλ πρὸς λδ, ἡ βδ πρὸς δχ. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ κλ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ρλ, λδ τῷ ἀπὸ λκ ἐστὶν ἴσον, ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ λκ πρὸς τὸ ἀπὸ λδ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ δχ, τουτέστιν ἡ χζ πρὸς ζθ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ κβ, βχ πρὸς βχ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ κβ τῇ βζ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἡ ζχ πρὸς χβ, οὕτως ἡ λχ πρὸς χδ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ χζ πρὸς ζβ, οὕτως ἡ χλ πρὸς λδ. ὥστε καὶ ὡς ἡ λδ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ρλ πρὸς λδ, οὕτως ἡ χζ πρὸς ζθ. ὡς δὲ ἡ δλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζχ. καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ρλ πρὸς λχ, οὕτως ἡ βζ πρὸς ζθ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, οὕτως ἡ ζθ πρὸς θβ. ὡς δὲ ἡ ζθ πρὸς θβ, οὕτως ἡ π πρὸς σ. καὶ ὡς ἄρα ἡ λχ πρὸς χρ, τουτέστιν ὁ αγλ κῶνος πρὸς τὸν αργ κῶ-

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ᾧ μὲν δεῖ ἴσον τμῆμα συστήσασθαι τὸ α β γ. ᾧ δὲ ὅμοιον τὸ ε ζ η. καὶ ἔστωσαν μέγιστοι κύκλοι τῶν σφαιρῶν οἱ α β γ ν, η ε ο ζ. διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ γ ν, η ο. καὶ κέντρα τὰ π, σ. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ π ν, ν τ πρὸς ν τ, οὕτως ἡ χ τ πρὸς τ γ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ σ ο φ πρὸς ο φ, ἡ υ φ πρὸς φ η. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν χ α β κῶνος τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας. ὁ δὲ ζ υ ε τῷ ε η ζ. πεποιήσθω ὡς ἡ υ φ πρὸς ε ζ, οὕτως ἡ χ τ πρὸς δ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν α β, δ, δύο μέσαι ἀνὰ λόγον εἰλήφθωσαν αἱ θ κ, ξ. ὥστε εἶναι, ὡς τὴν α β πρὸς θ κ, οὕτως τὴν κ θ πρὸς ξ, καὶ τὴν ξ πρὸς δ. καὶ ἐπὶ τῆς θ κ κύκλου τμῆμα ἐφεστάσθω τὸ θ κ λ, ὅμοιον τῷ ε ζ η κύκλου τμήματι, καὶ ἀναπεπληρώσθω ὁ κύκλος. καὶ ἔστω αὐτοῦ διάμετρος ἡ λ ξ. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ λ θ ξ κ, κέντρον δὲ τὸ ϱ. καὶ διὰ τῆς θ κ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἐκβεβλήσθω πρὸς τὴν λ ξ. ἔσται δὴ τὸ τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ λ, ὅμοιον τῷ ε ζ η τμήματι τῆς σφαίρας. ἐπειδὴ καὶ τῶν κύκλων τὰ τμήματα ἦν ὅμοια, λέγω δὲ ὅτι καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ α β γ τμήματι τῆς σφαίρας. πεποιήσθω ὡς συναμφότερος ἡ ϱ ξ υ πρὸς τὴν ξ υ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς υ λ. ἴσος ἄρα ψ θ κ κῶνος, τῷ θ κ λ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπειδὴ ὅμοιός ἐστιν ὁ ψ θ κ κῶνος τῷ ζ υ ε κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ υ φ πρὸς ε ζ, τουτέστιν ἡ χ τ πρὸς δ, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς θ κ. καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἄρα ἡ ψ υ πρὸς χ τ, ἡ θ κ πρὸς δ. καὶ ἐπειδὴ ἀνὰ λόγον εἰσὶν αἱ α β, κ θ, ξ, δ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ θ κ, ἡ θ κ πρὸς δ. ὡς δὲ ἡ θ κ πρὸς δ, ἡ ψ υ πρὸς χ τ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ α β πρὸς τὸ ἀπὸ κ θ, τουτέστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν θ κ κύκλος, οὕτως ἡ ψ υ πρὸς τὴν χ τ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ χ α β κῶνος τῷ ψ θ κ κώνῳ. ὥστε καὶ τὸ α β γ τμῆμα τῆς σφαίρας ἴσον ἐστὶ τῷ θ κ λ τμήματι τῆς σφαίρας. τῷ δοθέντι ἄρα τμήματι τῷ α β γ ἴσον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ὅμοιον τῷ ε ζ η, τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ θ κ λ.

ε

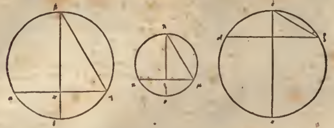
Δύο δοθέντων σφαίρας τμημάτων, εἴτε τῆς αὐτῆς, εἴτε μή, εὑρεῖν τμῆμα σφαίρας, ὃ ἔσται ἑνὶ μὲν τῶν δοθέντων ὅμοιον, τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἕξει ἴσην τῇ τοῦ ἑτέρου τμήματος ἐπιφανείᾳ. ἔστω τὰ δοθέντα τμήματα σφαιρικὰ ἐπὶ τῆς α β γ, δ ε ζ περιφερείας. καὶ ἔστω ᾧ μὲν δεῖ ὅμοιον εὑρεῖν τῷ ἐπὶ τὴν α β γ περιφέρειαν. οὗ δὲ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ, τὸ ἐπὶ τὴν δ ε ζ. καὶ γεγονέτω καὶ ἔστω τὸ κ λ μ τῆς σφαίρας, τῷ μὲν α β γ τμήματι ὅμοιον. τὴν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσην ἐχέτω τῇ τοῦ δ ε ζ τμήματος ἐπιφανείᾳ. καὶ νοείσθω τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν. καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω ὀρθὰ πρὸς τὰς τῶν τμημάτων βάσεις. καὶ ἐν μὲν ταῖς σφαίραις τομαὶ ἔστωσαν οἱ κ λ μ ν, β α γ θ, ε ζ η δ μέγιστοι κύκλοι. ἐν δὲ ταῖς βάσεσι τῶν τμημάτων, αἱ κ μ, α γ, δ ζ εὐθεῖαι. διάμετροι δὲ τῶν σφαιρῶν πρὸς ὀρθὰς οὖσαι ταῖς κ μ, α γ, δ ζ, ἔστωσαν αἱ λ ν, β θ, ε η. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λ μ, β γ, ε ζ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ τοῦ κ λ μ τμήματος τῆς σφαίρας ἐπιφά-



νεια τῇ τοῦ δ ε ζ τμήματος ἐπιφανείᾳ, ἴσος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ε ζ. αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων ἴσαι εἰσὶ κύκλοις, ὧν αἱ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαι εἰσὶν ταῖς ἀπὸ τῶν κορυφῶν τῶν τμημάτων ἐπὶ τὰς βάσεις ἐπιζευγνυούσαις. ὥστε καὶ ἡ μ λ τῇ ε ζ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ ὅμοιον ἐστὶ τὸ κ λ μ τῷ α β γ τμήματι, ἔστιν ὡς ἡ ϱ λ πρὸς ϱ ν, ἡ β π πρὸς π θ. καὶ ἀνάπαλιν. καὶ συνθέντι ὡς ἡ ν λ πρὸς λ ϱ, οὕτως ἡ θ β πρὸς β π. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ϱ λ πρὸς λ μ, οὕτως ἡ β π πρὸς γ β. ὅμοια γὰρ τὰ τρίγωνα. ὡς ἄρα ἡ ν λ πρὸς λ μ, τουτέστι πρὸς ε ζ, οὕτως ἡ θ β πρὸς β γ. καὶ ἐναλλάξ. λόγος δὲ τῆς ε ζ πρὸς β γ δοθείς. δοθεῖσαι γὰρ ἑκατέρα. λόγος ἄρα καὶ τῆς λ ν πρὸς β θ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ β θ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ λ ν. ὥστε καὶ ἡ σφαῖρα δοθεῖσά ἐστι.

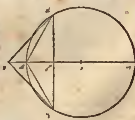
Συντεθήσεται

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἔστω τὰ δοθέντα δύο τμήματα σφαίρας, τὰ αβγ, δεζ. τὸ μὲν αβγ, ᾧ δεῖ ὅμοιον τὸ δὲ δεζ, ᾧ τὴν ἐπιφάνειαν ἴσην ἔχειν τῇ ἐπιφανείᾳ. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς ἐπὶ τῆς ἀναλύσεως. καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν ἡ βγ πρὸς εζ, οὕτως ἡ βθ πρὸς λν. καὶ περὶ διάμετρον τὴν λν κύκλος γεγράφθω. καὶ νοείσθω σφαῖρα ἧς μέγιστος ἔστω κύκλος ὁ λκνμ. καὶ τετμήσθω ἡ νλ κατὰ τὸ ξ. ὥστε εἶναι ὡς τὴν θπ πρὸς πβ, τὴν νξ πρὸς ξλ. καὶ διὰ τοῦ ξ ἐπιπέδῳ τετμήσθω ἡ ἐπιφάνεια ὀρθῷ πρὸς τὴν λν. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κμ. ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν κμ, αγ



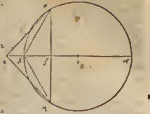
διαμέτρων κύκλων τμήματα, ὥστε καὶ τὰ τμήματα τῶν σφαιρῶν ἐστὶν ὅμοια. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ θβ πρὸς βπ, οὕτως ἡ νλ πρὸς λξ. καὶ γὰρ τὰ κατὰ διαίρεσιν. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ πβ πρὸς βγ, οὕτως ἡ ξλ πρὸς λμ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς νλ, ἡ βγ πρὸς λμ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ θβ πρὸς λν, ἡ βγ πρὸς εζ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ εζ τῇ λμ. ὥστε καὶ ὁ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ εζ, ἴσος ἐστὶ κύκλῳ οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λμ. καὶ ὁ μὲν τὴν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων τὴν εζ κύκλος, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεζ τμήματος. ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ λμ, ἴσος ἐστὶ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κλμ τμήματος. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ δέδεικται. ἴση ἄρα καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κλμ τμήματος τῆς σφαίρας, τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ δεξ τμήματος, καὶ ἐστὶν ὅμοιον τὸ κλμ τῷ αβγ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας τμῆμα τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν δοθέντα λόγον ἔχειν. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ βδ. δεῖ δὴ τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν τῷ διὰ τῆς αγ, ὅπως τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν αβγ κῶνον λόγον ἔχῃ τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι. γεγονέτω καὶ ἔστω κέντρον τῆς σφαίρας τὸ ε. καὶ ὡς συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ ηζ πρὸς ζβ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ αγη κῶνος τῷ αβγ τμήματι. λόγος ἄρα καὶ τοῦ αηγ κώνου πρὸς τὸν αβγ κῶνον δοθείς. λόγος ἄρα τῆς ηζ πρὸς ζβ δοθείς. ὡς δὲ ἡ ηζ πρὸς ζβ συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ. λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆς εδζ πρὸς δζ δοθείς, ὥστε καὶ τῆς εδ πρὸς δζ. δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ δζ, ὥστε καὶ ἡ αγ. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. καὶ ἔστι συναμφότερος μὲν ἡ εδβ τρὶς ἡ εδ. ἡ δὲ βδ δὶς ἡ εδ. συναμφότερος ἄρα ἡ εδζ πρὸς δζ, μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. καὶ ἔστιν ὁ συναμφοτέρου τῆς εδζ πρὸς ζδ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ δοθέντι. δεῖ ἄρα τὸν διδόμενον λόγον εἰς τὴν σύνθεσιν μείζονα εἶναι, τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο.

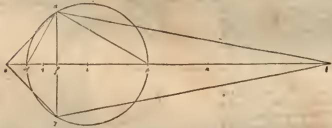


Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστω ἡ δοθεῖσα σφαῖρα, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. διάμετρος δὲ ἡ βδ. κέντρον δὲ τὸ ε. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς κθ πρὸς κλ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει τρία πρὸς δύο. ἔστι δὲ ὡς τρία πρὸς δύο, συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. καὶ ἡ θκ ἄρα πρὸς κλ μείζονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει συναμφότερος ἡ εδβ πρὸς δβ. διελόντι ἄρα ἡ θλ πρὸς λκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δβ. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ θλ πρὸς λκ, οὕτως ἡ εδ πρὸς δζ. καὶ διὰ τοῦ ζ τῇ βδ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ αζγ. καὶ διὰ τῆς αγ ἤχθω ἐπίπεδον

θω ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὴν βδ. λέγω ὅτι τὸ αβγ τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸν αβγ κῶνον λόγον ἔχει τὸν αὐτὸν τῷ θκ πρὸς κλ. πεποιήσθω γὰρ ὡς συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ λζ πρὸς ζβ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ γαλ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ θκ πρὸς κλ, οὕτως συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, τουτέστιν ἡ λζ πρὸς ζβ, τουτέστιν ὁ αλγ κῶνος, πρὸς τὸν αβγ κῶνον. ἴσος δὲ ὁ αλγ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας. ὡς ἄρα τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸν αβγ κῶνον, οὕτως ἡ θκ πρὸς κλ.



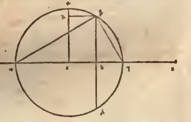
Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν λόγον ἔχει, ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ μείζονος τμήματος ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ ἐλάσσονος ἐπιφάνειαν. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἔστω σφαῖρα, καὶ ἐν αὐτῇ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. καὶ διάμετρος ἡ βδ. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τῆς αγ ὀρθῷ πρὸς τὸν αβγδ κύκλον. καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας τὸ αβγ, λέγω ὅτι τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αδγ, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βαδ. καὶ ἔστω κέντρον τὸ ε. καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, ἡ θζ πρὸς ζβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς βζ, οὕτως ἡ



κζ πρὸς ζδ. καὶ νενοήσθωσαν κῶνοι, βάσιν ἔχοντες τὸν περὶ διάμετρον τὴν αβγ κύκλον, κορυφὰς δὲ τὰ θ, κ σημεῖα. ἔσται δὴ ἴσος ὁ μὲν αθγ κῶνος τῷ αβγ τμήματι τῆς σφαίρας, ὁ δὲ ακγ τῷ αδγ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ, οὕτως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ αδγ τμήματος. τοῦτο γὰρ προγέγραπται. δεικτέον ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον, ἤπερ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. λέγω ὅτι καὶ ὁ αθγ κῶνος πρὸς τὸν ακγ, τουτέστιν ἡ ζθ πρὸς ζκ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλάσιον τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ βα πρὸς τὸ ἀπὸ αδ, τουτέστιν ἡ βζ πρὸς ζδ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν συναμφότερος ἡ εδζ πρὸς δζ, οὕτως ἡ θζ πρὸς ζβ. ὡς δὲ συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς βζ, οὕτως ἡ ζκ πρὸς ζδ. ἔσται καὶ ὡς ἡ βζ πρὸς ζδ, ἡ θβ πρὸς βε. ἴση γὰρ ἡ βε τῇ δε. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ἐπάνω συναποδέδεικται. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ εβζ πρὸς βζ, ἡ κζ πρὸς ζδ. ἔστω τῇ βε ἴση ἡ βη. δῆλον γὰρ ὅτι μεῖζόν ἐστιν ἡ θβ τῆς βε. ἐπεὶ καὶ ἡ βζ τῆς ζδ. καὶ ἔσται ὡς ἡ κζ πρὸς ζβ, ἡ κζ πρὸς ζδ. ὡς δὲ ἡ ζβ πρὸς ζδ, ἐδείχθη ἡ θβ πρὸς βε. ἴση δὲ ἡ βε τῇ ηβ. ὡς ἄρα ἡ θβ πρὸς βη, οὕτως ἡ κζ πρὸς ζη. καὶ ἐπεὶ ἡ θζ πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς βκ. ὡς δὲ ἡ θβ πρὸς βη, ἐδείχθη ἡ κζ πρὸς ζη. ἡ θζ ἄρα πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κζ πρὸς ζη. ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζη, τοῦ ἀπὸ ζκ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζη, τουτέστιν ἡ ζθ πρὸς ζη, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. τὸ δὲ ἀπὸ κζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ κζ πρὸς ζη. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ κζ πρὸς ζη. (ἡ

κζ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ διπλασίονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ βζ πρὸς ζδ.) τοῦτο γὰρ ἐζητεῖτο μόνον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε τῇ εδ, ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βζ δ τοῦ ὑπὸ τῶν βε δ. ἡ ζβ ἄρα πρὸς βε ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εδ πρὸς δζ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βζ. ἔλασσον ἄρα τὸ ἀπὸ ζβ τοῦ ὑπὸ τῶν θβ ε, τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν θβ κ. ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ βν τῷ ὑπὸ θβ κ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ θβ πρὸς βκ, τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ ἀπὸ νκ. τὸ δὲ ἀπὸ θζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ θν πρὸς τὸ νκ. τὸ ἀπὸ θζ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ θβ πρὸς βκ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς βε, τουτέστιν ἡ κζ πρὸς ζη. ἡ ἄρα θζ πρὸς ζκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τῆς κζ πρὸς ζη. τοῦτο γὰρ ἐπιτελεῖ. καί ἐστιν ὡς μὲν ἡ θζ πρὸς ζη, ὁ αθγ κῶνος πρὸς τὸν αηγ κῶνον. τουτέστι τὸ αβγ τμῆμα πρὸς τὸ αδγ τμῆμα. ὡς δὲ ἡ κζ πρὸς ζη, ἡ βζ πρὸς ζδ, τουτέστι τὸ ἀπὸ βδ πρὸς τὸ ἀπὸ αδ. τουτέστιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβγ τμήματος, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ αδγ τμήματος ἄλλοις τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλασίονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον.

Ἄλλως. Ἔστω σφαῖρα, ἐν ᾗ μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. διάμετρος δὲ ἡ αγ. κέντρον δὲ τὸ ε. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ὀρθῷ διὰ τῆς βδ πρὸς τὴν αγ. λέγω ὅτι τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ δαβ πρὸς τὸ ἔλασσον τὸ βγδ, ἐλάσσονα ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ αβδ τμήματος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ βγδ τμήματος. μείζονα δὲ ἢ ἡμιόλιον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ. ὁ δὲ τῆς ἐπιφανείας πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν λόγος, ὁ τοῦ κύκλου ἐστὶν οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ αβ, πρὸς τὸν κύκλον οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ βγ, τουτέστιν ὁ τῆς αθ πρὸς τὴν θγ. κείσθω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἴση ἑκατέρα τῶν αζ, γη. ὁ δὲ τοῦ βαδ τμήματος πρὸς τὸ βγδ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ βαδ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον, οὗ ἡ βάσις μέν ἐστιν ὁ περὶ διάμετρον τὴν βδ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ α σημεῖον. καὶ ὁ αὐτὸς κῶνος πρὸς τὸν κῶνον βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν αὐτήν, κορυφὴν δὲ τὸ γ σημεῖον, καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος πρὸς τὸ βγδ τμῆμα. ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ βαδ τμήματος λόγος, πρὸς τὸν βαδ κῶνον, ὁ τῆς ηθ ἐστὶ πρὸς θγ. ὁ δὲ τοῦ κώνου, πρὸς τὸν κῶνον ὁ τῆς αθ πρὸς θγ. ὁ δὲ τοῦ βγδ κώνου πρὸς τὸ τμῆμα τὸ βγδ. ὁ τῆς αθ ἐστὶ πρὸς θζ. ὁ δὲ συνημμένος ἐκ τῆς ηθ πρὸς θγ, καὶ τῆς αθ πρὸς θγ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν αθη ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ηθ, θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ μετὰ τοῦ τῆς αθ

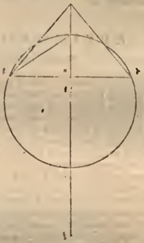


πρὸς θζ. ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ηθ, θα ἐστὶν ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ, ἐπὶ τὴν θζ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ηθα ἐπὶ τὴν θα, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θη, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς θα ἐστὶ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ θα ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τῆς αθ πρὸς θγ. διπλάσιος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θγ. τὸ ἄρα ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν ηθ, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θζ. ὅτι ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν ζθ, τοῦ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θη. ὅτι ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ θζ τῆς θη, φημὶ δὲ ὅτι καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον λόγον μείζονα ἔχει, ἢ ἡμιόλιον τοῦ τῆς ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν λόγου. ἀλλ' ὁ μὲν τῶν τμημάτων ἐδείχθη, ὁ αὐτὸς ὢν ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θζ. τοῦ δὲ τῆς ἐπιφανείας λόγου, ἡμιόλιος ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ αβ κύβου πρὸς τὸν ἀπὸ βγ κύβον. φημὶ δή, ὅτι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ ἀπὸ τῆς αβ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς βγ κύβον. τουτέστιν ὁ ἀπὸ τῆς αθ κύβος, πρὸς τὸν ἀπὸ θβ κύβον. τουτέστιν ὁ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθ. καί ἐστιν αθ πρὸς θβ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ θβ, προσλαβὼν τὸν τῆς αθ πρὸς θβ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν γθβ. ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θβγ, ὁ τοῦ ἀπὸ αθ ἐστὶν ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θβγ ἐπὶ τὴν θη. φημὶ δὴ ὅτι ἄρα τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη πρὸς τὸ ἀπὸ γθ ἐπὶ τὴν θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἀπὸ αθ πρὸς τὸ ἀπὸ βθγ. τουτέστι τὸ ἀπὸ αθ ἐπὶ τὴν θη, πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐπὶ τὴν θη. δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ θγ ἐπὶ τὴν θζ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν βθγ, ἐπὶ τὴν ηθ. ὃ τουτέστι τῷ δεῖξαι, ὅτι τὸ ἀπὸ γθ πρὸς τὸ ὑπὸ βθγ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ηθ πρὸς θζ. δεῖ ἄρα δεῖξαι, ὅτι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ε τῇ εγ πρὸς ὀρθὰς ἡ εκ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ β κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ βλ. ἐπίλοιπον ἡμῖν δεῖξαι, διότι ἡ ηθ πρὸς θζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. ἴση δέ ἐστιν ἡ θζ

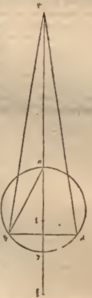
συναμφοτέρῳ

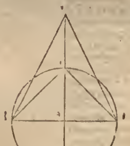
συναμφοτέρῳ τῇ αθ κι. δεῖξαι ἄρα δεῖ, ὅτι ἡ κθ πρὸς συναμφότερον τὴν θα κι, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ. καὶ ἀφαιρεθεισῶν ἄρα ἀπὸ τῆς θκ τῆς γθ, ἀπὸ δὲ τῆς κι, τῆς ιλ ἴσης τῇ βθ, δεήσει δειχθῆναι, ὅτι λοιπὴ ἡ γκ πρὸς λοιπὴν συναμφότερον τὴν αθ, κλ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ γθ πρὸς θβ, τουτέστιν ἡ θβ πρὸς θα. τουτέστιν ἡ λι πρὸς θα. καὶ ἐναλλάξ. ὅτι ἡ κι πρὸς ιλ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ συναμφότερος ἡ κλ, θα, πρὸς θα. καὶ διελόντι, ἡ κλ πρὸς λι μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κλ πρὸς θα. ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἡ λι τῆς θα.

Τῶν ὑπὸ τῇ ἴσῃ ἐπιφανείᾳ περιεχομένων σφαιρικῶν τμημάτων, μεῖζόν ἐστι τὸ ἡμισφαίριον. ἔστω γὰρ σφαίρας μέγιστος κύκλος ὁ αβγδ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αγ. καὶ ἄλλης σφαίρας, ἧς μέγιστος κύκλος ὁ εζηθ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ εη. καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ ἡ μὲν ἑτέρα σφαῖρα διὰ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ἑτέρα μὴ διὰ τοῦ κέντρου. ἔστω δὲ τὰ μὲν τέμνοντα ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς τὰς αγ, εη διαμέτρους. καὶ τετμήσθωσαν κατὰ τὰς δβ, ζθ γραμμάς. ἔστι δὴ τὸ μὲν κατὰ τὴν ζεθ περιφέρειαν τμῆμα τῆς σφαίρας ἡμισφαίριον, τῶν δὲ κατὰ τὴν βαδ περιφέρειαν τομῶν, ἐν μὲν τῷ ἑτέρῳ σχήματι πρὸς ὃ τὸ σ σημεῖον μεῖζον ἡμισφαιρίου. ἐν δὲ τῷ ἑτέρῳ ἔλασσον ἡμισφαιρίου. ἴσαι δὲ ἔστωσαν αἱ τῶν εἰρημένων τμημάτων ἐπιφάνειαι.

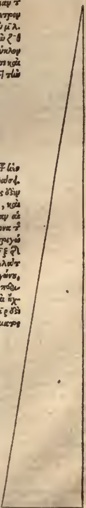


λέγω οὖν ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ κατὰ τὴν ζεθ περιφέρειαν ἡμισφαίριον, τοῦ κατὰ τὴν βαδ περιφέρειαν τμήματος. ἐπεὶ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εἰρημένων τμημάτων, φανερὸν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ βα τῇ εζ εὐθείᾳ. δέδεικται γὰρ ἑκάστου τμήματος ἡ ἐπιφάνεια ἴση οὖσα κύκλῳ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ τμήματος εὐθείᾳ ἀγομένῃ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅ ἐστι βάσις τοῦ τμήματος. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡμίσεως κύκλου ἡ βαδ περιφέρεια ἐν τῷ ἑτέρῳ σχήματι, πρὸς ὃ τὸ σ σημεῖον, δῆλον ὅτι ἡ βα ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασίων δυνάμει τῆς ακ, τῆς δὲ ἐκ τοῦ κέντρου μείζων ἢ διπλασίων δυνάμει. ἔστω δὲ καὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αβδ κύκλου ἴση ἡ γξ. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ γξ πρὸς τὴν γκ, τοῦτον ἐχέτω ἡ μα πρὸς ακ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου περὶ διάμετρον τὴν βδ κῶνος ἔστω, κορυφὴν ἔχων τὸ μ σημεῖον. ἴσος δή ἐστιν οὗτος τῷ κατὰ τὴν βαδ περιφέρειαν τμήματι τῆς σφαίρας. ἔστω καὶ τῇ ελ ἴση ἡ εν. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τοῦ περὶ διάμετρον τὴν θζ κῶνος, ἔστω κορυφὴν ἔχων τὸ ν σημεῖον. ἴσος δὴ καὶ οὗτός ἐστι τῷ κατὰ τὴν θεζ περιφέρειαν ἡμισφαιρίῳ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν



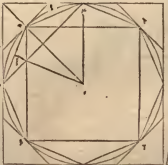


α ξ γ μεῖζόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν α κ γ. διότι τὰς ἐλάσσονας πλευρὰς τοῦ ἐλάσσονος τοῦ ἑτέρου μείζονας ἔχει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς α ρ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν α κ, γ ξ. ἥμισυ γάρ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς α β. μεῖζον οὖν ἐστι καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ συναμφοτέρου. τὸ ἄρα περιεχόμενον ὑπὸ τῶν γ α ρ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ξ κ α. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ξ κ α, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν μ κ γ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν γ α ρ, τοῦ ὑπὸ τῶν μ κ γ. ὥστε μείζονα λόγον ἔχει ἡ γ α πρὸς τὴν κ γ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς τὴν α ρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ α γ πρὸς τὴν γ κ, τοῦτον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς α β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β κ. δῆλον οὖν, ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς α β, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ α ρ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β κ, ἤπερ ἡ μ κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς α ρ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ λ ν. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει καὶ ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὴν ζ θ, πρὸς τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὴν β δ, ἢ ἡ μ κ πρὸς τὴν μ λ. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ κῶνος, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν ζ θ κύκλον, κορυφὴν δὲ τὸ ν σημεῖον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος κύκλον τὸν περὶ διάμετρον μὲν τὴν β δ, κορυφὴν δὲ τὸ μ σημεῖον. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ἡμισφαίριον τὸ ἐπὶ τὴν ε ζ θ περιφέρειαν, μεῖζόν ἐστι τοῦ τμήματος τοῦ ἐπὶ τὴν β α δ περιφέρειαν.



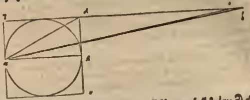
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

α Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει. ἐχέτω ὁ α β γ δ κύκλος, ὡς ὑπόκειται. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ ε. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος, καὶ ἐγγεγράφθω τὸ α γ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἔστω τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου. τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. εἰλήφθω κέντρον τὸ ν, καὶ κάθετος ἡ ν ξ. ἐλάσσων ἄρα ἡ ν ξ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς. ἔστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων. ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου. ἔλαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον τοῦ ε τριγώνου, ὅπερ ἄτοπον. ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατόν, ἐλάττων τοῦ ε τριγώνου. καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον, καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα. καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ο α ρ. ἡ ο ρ ἄρα τῆς μ ρ ἐστὶ μείζων. ἡ γὰρ ρ μ τῇ ρ α ἴση ἐστί, καὶ τὸ ρ ο π τρίγωνον ἄρα τοῦ ο ζ α μ σχήματος μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ. λελείφθωσαν οἱ τῷ π ζ α τομεῖ ὅμοιοι ἐλάσσονες τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ε τρίγωνον τοῦ α β γ δ κύκλου. ἔστιν ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἔτι τοῦ ε ἔλασσον, ὅπερ ἄτοπον. ἔστι γὰρ μεῖζον, ὅτι ἡ μὲν ν α ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου. ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ ε τριγώνῳ.



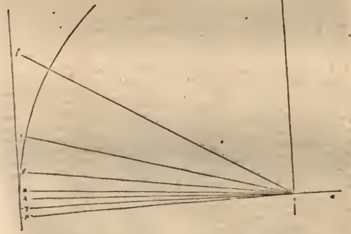
β Ὁ κύκλος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνον, λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ. ἔστω κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ α β.

αβ. καὶ περιγεγράφθω τετράγωνον τὸ γη, καὶ τῆς γδ διπλῆ, ἡ δε. ἕβδομον δὲ ἡ εζ τῆς γδ.



ἐπεὶ οὖν τὸ αγε πρὸς τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν κα πρὸς ζ. πρὸς δὲ τὸ αεζ τὸ αγδ λόγον ἔχει, ὃν ἑπτὰ πρὸς ἕν. τὸ αγζ πρὸς τὸ αγδ ἐστίν, ὡς κβ πρὸς ζ. ἀλλὰ τοῦ αγδ τετραπλάσιον ἐστὶ, τὸ γη τετράγωνον. τὸ δὲ αγζ τρίγωνον, τῷ αβ κύκλῳ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ ἡ μὲν αγ κάθετος ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ δὲ βάσις τῆς διαμέτρου τριπλασίων, καὶ τῷ ζε ἔγγιστα ὑπερέχουσα δειχθήσεται. ὁ κύκλος οὖν πρὸς τὸ γη τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν ια πρὸς ιδ.

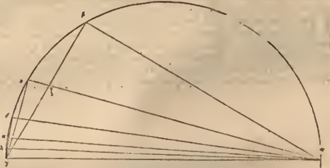
Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστί. καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις. ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ αγ, καὶ κέντρον τὸ ε, καὶ ἡ γλζ ἐφαπτομένη. καὶ ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτου ὀρθῆς. ἡ εζ ἄρα πρὸς ζγ λόγον ἔχει, ὃν τϛ πρὸς ρνγ. ἡ δὲ εγ πρὸς τὴν γζ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ δίχα τῇ εη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζε πρὸς εγ, ἡ ζη πρὸς ηγ. καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι, ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ζε εγ πρὸς ζγ, ἡ εγ πρὸς γη. ὥστε ἡ γε πρὸς γη μείζονα λό-



γον ἔχει, ἤπερ φϛα πρὸς ρνγ. ἡ εη ἄρα πρὸς ηγ δυνάμει, λόγον ἔχει, ὃν Μ βυν πρὸς Μ, γυθ. μή- λδ β / μ μ
κει ἄρα ὃν φϛα πρὸς ρνγ. πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ηεγ τῇ εθ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ εγ πρὸς γθ, μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν αρξβ η' πρὸς ρνγ. ἡ θε ἄρα πρὸς θγ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν αροβ η' πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ θεγ τῇ εκ. ἡ εγ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν βτλδ δ' πρὸς ρνγ. ἡ εκ ἄρα πρὸς γκ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν βτλθ δ' πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ κεγ τῇ λε. ἡ εγ ἄρα πρὸς λγ μείζονα μήκει λόγον ἔχει, ἤπερ δχογ ∠ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ζεγ τρίτον οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ λεγ, ὀρθῆς ἐστι μη. κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση ἡ πρὸς τῷ ε, ἡ ὑπὸ γεμ. ἡ ἄρα ὑπὸ λεμ ὀρθῆς ἐστι κδ. καὶ ἡ λμ ἄρα εὐθεῖα πλευρά ἐστι τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου πολυγώνου πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. ἐπεὶ οὖν ἡ εγ πρὸς τὴν γλ ἐδείχθη μείζονα λό-

γον ἔχουσα, ἤπερ ͵δχογ∠ πρὸς ρογ. ἀλλὰ τῆς μὲν ΓΛ διπλῆ ἡ ΑΓ. τῆς δὲ ΓΛ διπλασίων ἡ ΚΜ.
α καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϟϛ πολυγώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵δχογ∠ πρὸς
μ ͵δχπη. καί ἐστι τριπλασία. καὶ ὑπερέχουσι ͵χξζ∠ ἅπερ τῶν ͵δχογ∠, ἐλάσσονά ἐστι τὸ ἕβδομον, ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον, καὶ ἔλαττον ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον. ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων, καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

δ. Ἔστω κύκλος, καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ. ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τρίτου ὀρθῆς. ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ατνα πρὸς ψπ. ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ὃν ͵αφξ πρὸς ψπ. τετμήσθω δίχα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ΑΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ. καὶ ἡ ὑπὸ



ΗΓΒ ἄρα, τῇ ὑπὸ ΗΑΓ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ὀρθή, καὶ τρίτη ἄρα ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΗΖΓ τρίτῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΗ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ, καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ, καὶ συναμφότερος ἡ ΓΑΒ πρὸς ΒΓ. καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ. διὰ τοῦτο οὖν ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ͵βϡια πρὸς ψπ. ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἐλάσσονα, ἢ ὃν ͵γιγ∠δ' πρὸς ψπ. δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ. ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵ελκδ∠δ' πρὸς ψπ, ἢ ὃν ͵αωκγ πρὸς σμ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ' ιγ. ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αωλη θ' πρὸς σμ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ. καὶ ἡ ΚΑ, πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει, ἢ ὃν ͵αζ πρὸς ξϛ. ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας οἶμαι ἄρα πρὸς τὴν κατάλογον ͵αος πρὸς ξϛ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ. ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς τὴν ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ὃν τὰ ͵βιϛ ϛ' πρὸς ξϛ. ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα, ἢ τὰ ͵βιζδ' πρὸς ξϛ. ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα ἔχει λόγον ἤπερ ͵ϛτλϛ πρὸς ͵βιζδ'. ἅπερ τῶν ͵βιζδ' μείζονα ἐστὶν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα. καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟϛ πολυγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου, τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ δέκα οα. ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων, ἢ δέκα οα. ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ, καὶ ἐλάσσων μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζων δέ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΕΙΔΕΩΝ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΟΕΙΔΕΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΕΥ ΠΡΑΤΤΕΙΝ.

ΑΠΟΣΤΕΛΛΩ σοι γράψας ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τῶν τε λοιπῶν θεωρημάτων τὰς ἀποδείξιας, ὧν οὐκ εἶχες ἐν τοῖς πρότερον ἀπεσταλμένοις, καὶ ἄλλων ὕστερον ποτεξευρημένων, ἃ πρότερον μὲν ἤδη πολλάκις ἐγχειρήσας ἐπισκέπτεσθαι, δύσκολον ἔχειν τι φανείσας μοι τᾶς εὑρέσιος αὐτῶν ἠπόρησα. διόπερ οὐδὲ συνεξεδόθεν τοῖς ἄλλοις αὐτὰ τὰ προβεβλημένα. ὕστερον δὲ ἐπιμελέστερον ποτ' αὐτοῖς γενόμενος ἐξεῦρον τὰ ἀπορηθέντα. ἦν δὲ τὰ μὲν λοιπὰ τῶν προτέρων θεωρημάτων περὶ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος προβεβλημένα, τὰ δὲ νῦν ἐντὶ ποτ' ἐξευρημένα περί τε ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, καὶ περὶ σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν τὰ μὲν παραμάκεα, τὰ δὲ ἐπιπλατέα καλέω. περὶ μὲν οὖν τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὑπόκειται τάδε. εἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιλαφθὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ὀρθογώνιον κωνοειδὲς καλείσθω, καὶ ἄξονα μὲν αὐτοῦ, τὰν μεμενακοῖσαν διάμετρον καλεῖσθαι. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας. καὶ εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ, κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. ἄξονα δὲ τὰν ἐναπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν ἐν τῷ τμάματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος παρὰ τὸν ἄξονα τοῦ κωνοειδέος. προεβάλλοντο δὲ τάδε θεωρῆσαι, διὰ τί εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος τμάματα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ διὰ τί εἴκα ἀπὸ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέντα ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ ἀποτμαθέντα τμάματα διπλάσιον λόγον ἑξοῦντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων. περὶ δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ὑποτιθέμεθα μὲν τάδε. εἴκα ἐν ἐπιπέδῳ ἔωντι ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς, καὶ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου τομᾶς. μενούσας δὲ τᾶς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντί αἱ εἰρημέναι γραμμαί, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, αἱ μὲν ἔγγιστα εὐθεῖαι τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, δῆλον ὡς κῶνον ἰσοσκελῆ περιλαψοῦντι, οὗ κορυφὴ ἐσσεῖται τὸ σαμεῖον καθ' ὃ ἔγγιστα συμπίπτοντι. ἄξων δὲ ἁ μεμενακοῖσα διάμετρος. τὸ δ' ὑπὸ τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς σχῆμα περιλαφθέν, ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς καλείσθω. ἄξονα δὲ αὐτοῦ τὰν μεμενακοῖσαν διάμετρον. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ κωνοειδέος. τὸν δὲ κῶνον τὸν περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶς τοῦ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς, περιέχοντα τὸ κωνοειδὲς καλεῖσθαι. τὰν δὲ μεταξὺ εὐθεῖαν τᾶς τε κορυφᾶς τοῦ κωνοειδέος καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. καὶ εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον, ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθέν, ἀποτέμῃ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος τὸ ἐπίπεδον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ κωνοειδέος τομᾶς, ἐν τῷ ἀποτέμνοντι ἐπιπέδῳ. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον τοῦ κωνοειδέος. ἄξονα τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἐν τῷ τμάματι, ἀπὸ τᾶς ἀχθείσας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, καὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές. καὶ τὰν μεταξὺ τᾶν εἰρημέναν κορυφᾶν εὐθεῖαν ποτεοῦσαν τῷ ἄξονι καλεῖσθαι. τὰ μὲν οὖν ὀρθογώνια κωνοειδέα πάντα, ὅμοιά ἐντι. τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων κωνοειδέων ὅμοια καλείσθω, ὧν καὶ οἱ κῶνοι οἱ περιέχοντες τὰ κωνοειδέα ὅμοιοι ἔωντι. προβάλλεται δὲ τάδε θεωρῆσαι, διὰ τί εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτμαθῇ τμάματα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέρα ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος. καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. καὶ διὰ τί, εἴκα τοῦ ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος

δίχα τμᾶμα ἀποτμαθῇ ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὃ γίγνεται ἀπότμαμα κώνου, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφότερος ἴσα τῷ ἄξονι τοῦ τμάματος καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. περὶ δὲ τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὑποτιθέμεθα τάδε. εἴκα ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς μενούσας τᾶς μείζονος διαμέτρου περιενεχθεῖσα, ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφὲν σχῆμα, ὑπό τε τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς παραμάκες σφαιροειδὲς καλεῖσθαι. εἰ δὲ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου μενούσας περιενεχθεῖσα, ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιπλατυσφαιροειδὲς καλεῖσθαι. ἑκατέρου δὲ τῶν σφαιροειδέων ἄξονα μὲν καλεῖσθαι τὰν μεμενακοῖσαν διάμετρον. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον καθ᾽ ὃ ἅπτεται ὁ ἄξων τᾶς ἐπιφανείας τοῦ σφαιροειδέος. κέντρον δὲ καλεῖσθαι τὸ μέσον τοῦ ἄξονος, καὶ διάμετρον τὰν διὰ τοῦ κέντρου ποτ᾽ ὀρθὰς ἀγομέναν τῷ ἄξονι. καὶ εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτέρου ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύοντι μὴ τέμνοντα. παρὰ δὲ τὰ ἐπίπεδα τὰ ψαύοντα, ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθῇ, τέμνον τὸ σφαιροειδὲς τῶν γινομένων τμαμάτων, βάσιν μὲν καλεῖσθαι τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος τομᾶς ἐν τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. κορυφὰς δὲ τὰ σαμεῖα, καθ᾽ ἃς ἐπιψαύοντι τοῦ σφαιροειδέος τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἄξονας δὲ τὰς ἐναπολαφθείσας εὐθείας ἐν τοῖς τμαμάτεσσιν ἀπὸ τᾶς εὐθείας τὰς κορυφὰς αὐτῶν ἐπιζευγνυούσας. ὅτι δὲ τὰ τε ἐπιψαύοντα ἐπίπεδα τοῦ σφαιροειδέος καθ᾽ ἓν μόνον ἅπτονται σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ, καὶ ὅτι ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύεται, δειξοῦμεν. ὅμοια δὲ καλεῖσθαι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων, ὧν καὶ οἱ ἄξονες ποτὶ τὰς διαμέτρους τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι. τμάματα δὲ σφαιροειδέων σχημάτων καὶ κωνοειδέων ὅμοια καλεῖσθαι. εἴκα ἀφ᾽ ὁμοίων σχημάτων ἀφαιρημένα ἐόντι, καὶ τάς τε βάσεις ὁμοίας ἔχοντι καὶ οἱ ἄξονες αὐτῶν, ἤτοι ὀρθοὶ ἐόντες ποτὶ τὰ ἐπίπεδα τᾶν βάσεων, ἢ γωνίας ἴσας ποιοῦντες, ποτὶ τὰς ὁμολόγους διαμέτρους τῶν βάσεων τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ποτ᾽ ἀλλάλοις ταῖς ὁμολόγοις διαμέτροις τῶν βάσεων. προβάλλεται δὲ περὶ τῶν σφαιροειδέων τάδε θεωρῆσαι. διά τι εἴκα τι τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῶν γεναμένων τμαμάτων, ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. εἴκα δὲ ὀρθῷ μὲν ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ, διὰ τοῦ κέντρου δὲ τῶν γεναμένων τμαμάτων τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸν κῶνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς εὐθείας, ἃ δὴν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος. καὶ τῷ ἄξονι τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ ἐλάσσονος τμάματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς εὐθείας, ἃ δὴν ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. καὶ διατί εἴκα τὸ σφαιροειδέων τι ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ κέντρου μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τῶν γεναμένων τμαμάτων ἑκάτερον διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ σχήματος, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. γίγνεται δὲ τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου. εἴκα δὲ μήτε διὰ τοῦ κέντρου, μήτε ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς, τῶν γεναμένων τμαμάτων, τὸ μὲν μεῖζον ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ αὐτᾶς τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων. καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ συναμφοτέραις ἴσα τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος. γίνεται δὲ καὶ ἐν τούτοις τὸ σχῆμα ἀπότμαμα κώνου. ἀποδειχθέντων δὲ τῶν εἰρημένων θεωρημάτων διὰ τούτων εὑρίσκονται θεωρήματά τε πολλὰ καὶ προβλήματα. οἷον καὶ τόδε, ὅτι τὰ ὅμοια σφαιροειδέα, καὶ τὰ ὅμοια τμάματα τῶν τε σφαιροειδέων σχημάτων καὶ τῶν κωνοειδέων, τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὰ ἄλλα τῶν ἀξόνων, καὶ διότι τῶν ἰσοσφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ὑπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν. καὶ εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἀξόνεσσιν, ἴσα ἐντὶ τὰ σφαιροειδέα. πρόβλημα δὲ οἷον καὶ τόδε, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σφαιροειδέος τμάματος ἢ κωνοειδέος τμᾶμα, ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ ἐπιπέδῳ ἀγμένῳ.

μένω. ὁ μὲν δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἴσον τῷ δοθέντι κώνῳ, ἢ κυλίνδρῳ, ἢ σφαίρᾳ τᾷ δοθείσᾳ. προγράψαντες οὖν τά τε θεωρήματα καὶ τὰ ἐπιτάγματα τὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰς ἀποδέξιας αὐτῶν, μετὰ ταῦτα γραψοῦμαί σοι τὰ προβλήματα. εὐτύχει.

Εἴ κα κῶνος ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἤτοι κύκλος, ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν οὖν κύκλος ἁ τομά, δῆλον ὅτι τὸ ἀπολαφθὲν ἀπ' αὐτοῦ τμᾶμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ τοῦ κώνου κορυφᾷ, κῶνος ἐσσεῖται. εἴκα δὲ ἁ τομὰ γένηται ὀξυγωνίου κώνου τομά, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κώνου σχῆμα ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τοῦ κώνου κορυφᾷ ἀπότμαμα κώνου καλείσθω. τοῦ δ' ἀποτμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἐπίπεδον, τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ κώνου κορυφά. ἄξων δὲ, ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα. καὶ εἴκα κύλινδρος δυσὶν ἐπιπέδοισιν παραλλήλοις τμαθῇ, συμπιπτόντεσσι πάσαις ταῖς τοῦ κυλίνδρου πλευραῖς, αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται, ἤτοι κύκλοι, ἢ ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἴσαι καὶ ὁμοῖαι ἀλλάλαις. αἰ μὲν οὖν καὶ αἱ τομαὶ κύκλοι γίνωνται, δῆλον ὅτι τὸ ἀποτμαθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα, μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων κύλινδρος ἐσσεῖται. εἰ δὲ καὶ αἱ τομαὶ γίνωνται ὀξυγωνίων κώνων τομαί, τὸ ἀπολαφθὲν ἀπὸ τοῦ κυλίνδρου σχῆμα μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων τόμος κυλίνδρου καλείσθω. τοῦ δὲ τόμου βάσεις μὲν καλείσθω τὰ ἐπίπεδα τὰ περιλαφθέντα ὑπὸ τᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἄξων δὲ ἁ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τὰ κέντρα τᾶν τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἐσσεῖται δὲ αὕτα ἐπὶ τᾶς αὐτᾶς εὐθείας τῷ ἄξονι τοῦ κυλίνδρου. εἴκα ἔωντι μεγέθεα, ὁποσαοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα. ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ. καὶ ἄλλα μεγέθεα τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντα τὰ μεγέθεα, ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, πάντων μὲν τῶν τῷ ἴσῳ ὑπερεχόντων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται, ἢ διπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα ἢ διπλάσια. ἁ δὲ ἀπόδειξις τούτου φανερά. α

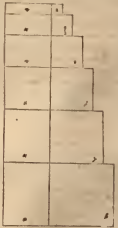
Εἴ κα μεγέθεα ὁποσαοῦν τῷ πλήθει, ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὰ ὁμοίως τεταγμένα, λέγηται δὲ τά τε πρῶτα μεγέθεα ποτὶ τ' ἄλλα μεγέθεα, ἢ πάντα, ἢ τινὰ αὐτῶν ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν, καὶ τὰ ὕστερον ποτ' ἄλλα μεγέθεα τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, πάντα τὰ πρῶτα μεγέθεα, ποτὶ πάντα ἃ λέγονται, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν ἔχοντι πάντα τὰ ὕστερον μεγέθεα ποτὶ πάντα ἃ λέγονται. ἔστω τινὰ μεγέθεα τὰ α β γ δ ε ζ ἄλλοις μεγέθεσιν ἴσοις τῷ πλήθει τοῖς η θ ι κ λ μ, κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. καὶ ἐχέτω τὸ μὲν α ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ. τὸ δὲ β ποτὶ τὸ γ, ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ ι. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. λεγέσθω δὲ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ μεγέθεα, ποτὶ τὰ ἄλλα μεγέθεα τὰ ν ξ ο π ρ σ, ἐν λόγοις ὁποιοισοῦν. τὰ δὲ η θ ι κ λ μ ποτὶ τ' ἄλλα τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. ὃν μὲν ἔχει λόγον τὸ α ποτὶ τὸ ν, τὸ η ἐχέτω ποτὶ τὸ τ. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ β ποτὶ τὸ ξ, τὸ θ ἐχέτω ποτὶ τὸ υ. καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως τούτοις. δεικτέον, ὅτι πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ, ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ν ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ η, τὸ δὲ α ποτὶ τὸ β ὃν τὸ η ποτὶ τὸ θ, τὸ δὲ β ποτὶ τὸ ξ ὃν τὸ θ ποτὶ τὸ υ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ ν ποτὶ τὸ ξ, ὃν τὸ τ ποτὶ τὸ υ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ο, ὃν τὸ υ ποτὶ τὸ φ. καὶ τούτοις τὰ ἄλλα ὁμοίως. ἔχοντι δὲ τὰ μὲν α β γ δ ε ζ πάντα ποτὶ τὸ α τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχοντι τὰ η θ ι κ λ μ πάντα ποτὶ τὸ η. τὸ δὲ α ποτὶ τὸ ν, ὃν τὸ η ποτὶ τὸ τ. τὸ δὲ ν ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ ς, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν τὸ τ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. δῆλον οὖν, ὅτι β

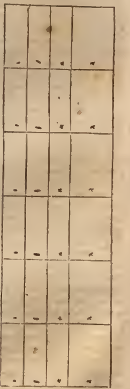




πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ εἴκα τῶν τὰ α β γ δ ε ζ μεγέθεων, τὰ μὲν α β γ δ ε λέγωντι ποτὶ τὰ ν ξ ο π ρ σ. τὸ δὲ ζ μηδὲ ποθ᾽ ἓν λέγηται, καὶ τῶν η θ ι κ λ μ λέγοντι ποτὶ τὰ τ υ φ χ ψ ω, τὰ ὁμοῖα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις, τὸ δὲ μ μηδὲ ποθ᾽ ἓν λέγηται, ὁμοίως πάντα τὰ α β γ δ ε ζ ποτὶ πάντα τὰ ν ξ ο π ρ σ, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ η θ ι κ λ μ ποτὶ πάντα τὰ τ υ φ χ ψ ω.

γ Εἴκα γραμμαὶ ἴσαι ἀλλάλαις ἐῶντι, ὁπόσαι οὖν τῷ πλάθει, καὶ παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν παραπέσῃ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἐῶντι δὲ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ. ἐῶντι δὲ καὶ ἄλλα χωρία τῷ μὲν πλάθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἴσα συναμφοτέραις ταῖς τε τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευραῖς, καὶ μιᾶ τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τῷ τε τρίτῳ μέρει τᾶς τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρᾶς, καὶ τᾷ ἡμίσᾳ μιᾶς τᾶν ἰσᾶν ἐουσᾶν. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία ἄνευ τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ ἴσαι εὐθεῖαι ὁποσαιοῦν τῷ πλάθει ἐφ᾽ ἃν τὰ α, καὶ παραπεπτωκέτω παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. ἔστων δὲ ὑπερβλημάτων πλευραὶ αἱ β, γ, δ, ε, ζ, η τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι. καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἔστω ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ. καὶ μεγίστα μὲν ἔστω ἁ β, ἐλαχίστα δὲ ἁ η. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ὧν ἕκαστον τῶν θ ι κ λ τῷ μὲν πλάθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον ἔστω τῷ μεγίστῳ τῷ παρὰ τὰν α β παρακειμένῳ. ἔστω δὲ ἁ μὲν θ ι γραμμὰ ἴσα τᾷ α. ἁ δὲ κ λ ἴσα τᾷ β. καὶ τᾶν μὲν θ ι γραμμᾶν ἑκάστα ἔστω διπλασία τᾶς ι. τᾶν δὲ κ λ ἑκάστη τριπλασία τᾶς κ. δεικτέον ὅτι τὰ χωρία πάντα ἐν οἷς τὰ θ ι κ λ ποτὶ μὲν πάντα τὰ ἕτερα χωρία τὰ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ ι κ λ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ι κ. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ ἄνευ τοῦ μεγίστου τοῦ α β μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἐντὶ γάρ τινα χωρία, ἐν οἷς τὰ α τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντα, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τῷ ἐλαχίστῳ. ἐπεί τε τὰ παραβλήματα καὶ τὰ πλάτη τῷ ἴσῳ ὑπερέχουσιν, καὶ ἄλλα χωρία, ἐν οἷς τὰ θ ι τῷ μὲν πλάθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ. σύμπαντα οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐντί, ἢ διπλασίονα. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ μεγίστου μεῖζον ἢ διπλασίονα. αὐτὰ οὖν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς τὰ α ἐλάσσονα ἐντί. τῶν δὲ λοιπῶν ἄνευ τοῦ μεγίστου μάζονα πάλιν ἐντὶ γραμμαὶ τινὲς αἱ β γ δ ε ζ η, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἐφ᾽ ἂν τὰ κ λ, τῷ μὲν πλάθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσαι τᾷ μεγίστᾳ. τὰ οὖν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν ἴσων ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, πάντων μὲν τῶν

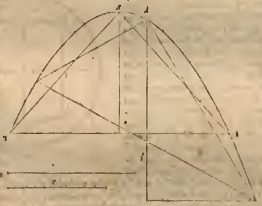




μὲν τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ πάντων τῶν ἴσων ἀλλάλων ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐστὶ ἢ τριπλασία. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλασία. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλικᾶν ἐκδεδομένοις. τὰ οὖν χωρία ἐν οἷς τὸ η, πάντων μὲν τῶν χωρίων ἐν οἷς β γ δ ε ζ η ἐλάσσονα ἐστίν. αὐτῶν δὲ τῶν ἐν οἷς τὰ γ δ ε ζ η μείζονα. ὥστε καὶ πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ ι κ, πάντων μὲν τῶν ἐν οἷς α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα ἐστὶ, τῶν δὲ ἐν οἷς α γ, α δ, α ε, α ζ, α η μείζονα. δῆλον οὖν ὅτι πάντα τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ θ ι, κ λ, ποτὶ μὲν τὰ χωρία ἐν οἷς τὰ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ, α η ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ λ ποτὶ τὰν ι κ. ποτὶ δὲ τὰ λοιπὰ χωρία τοῦ ἐν ᾧ τὸ α β μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου.

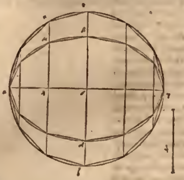
Εἴκα κώνου τομᾶς ὁποιασοῦν εὐθεῖαι, ἐπιψαύοντι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σαμείου ἀγμέναι, ἐῶντι δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ, παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἀγμέναι, καὶ τέμνουσαι ἀλλάλας, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτὶ τὰ ἄλλα ὅντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἐπιψαυουσᾶν. ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τᾶς ἑτέρας γραμμᾶς τμαμάτων τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τὰς ἐπιψαυούσας παρ᾽ ἀλλάλους αὐτάς. ἀποδέδεικται δὲ τοῦτο ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

Εἴκα ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ὁποσοῦν, ἴσας ἔχοντα τὰς διαμέτρους, αὐτά τε τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτὰ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. διάμετρον δὲ καλέω παντὸς τμάματος, τὰν δίχα τέμνουσαν τὰς εὐθείας πάσας, τὰς παρὰ τὰν βάσιν αὐτοῦ ἀγομένας. ἔστω ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β γ. καὶ ἀποτετμάσθω ἀπ᾽ αὐτᾶς δύο τμάματα, τό, τε α δ ε, καὶ τὸ θ β γ. ἔστω δὲ τοῦ μὲν α δ ε τμάματος διάμετρος ἁ δ ζ, τοῦ δὲ θ β γ ἁ β η. καὶ ἔστω ἴσαι αἱ δ ζ, β η. δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα ἴσα ἐστὶ τὰ α δ ε, θ β γ, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα τὸν εἰρημένον τρόπον ἐν αὐτοῖς. ἔστω δὲ πρότερον ἀποτέμνουσα τὸ ἕτερον τμᾶμα ἁ θ γ, ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. λελάφθω δὴ ἂν δυνάται, αἱ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἁ διπλασία τᾶς μέχρι τοῦ ἄξονος. καὶ ἔστω ἐφ᾽ ᾇ τὸ μ. ἀπὸ δὲ τοῦ α κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν δ ζ ἁ α κ. ἐπεὶ οὖν διάμετρος ἐστὶ ἁ δ ζ τοῦ τμάματος, ἁ τε α ε δίχα τέμνεται ἐπὶ τὸ ζ, καὶ ἁ δ ζ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστὶ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. οὕτω γὰρ δίχα τέμνει πάσας τὰς παρὰ τὰν α ε ἀγομένας. ὃν δὲ ἂν λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α κ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ν ποτὶ τὰν μ. αἱ δὲ ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν δ ζ ἀγόμεναι παρὰ τὰν α ε, δύνανται τὰ παρὰ τὰν ἴσαν τᾷ μ παραπίπτοντα πλάτος ἔχοντα, ἃς αὗται ἀπολαμβάνοντι ἀπὸ τᾶς δ ζ ποτὶ τῷ δ μορίας. δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς κωνικοῖς. δύναται οὖν καὶ ἁ α ζ ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς ν, καὶ τᾶς δ ζ. δύναται δὲ καὶ ἁ θ η, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μ, καὶ ὑπό τε τᾶς β η. ἐπεὶ κάθετος ἐστὶν ἁ θ η ἐπὶ τὰν διάμετρον. ἔχοι καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ η τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἐπεὶ ἴσαι ὑπέκειντο αἱ δ ζ, β η. ἔχει δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς α ζ τετράγωνον, καὶ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α κ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ν ποτὶ τὰν μ. ἴσαι ἄρα ἐστὶ αἱ θ η, α κ. ἐστὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ β η, δ ζ. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θ η, β η περιεχόμενον, τῷ ὑπὸ τᾶν α κ, δ ζ. ἴσον ἄρα ἐστὶν καὶ τὸ θ η β τρίγωνον τῷ δ α ζ τριγώνῳ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια. ἐστὶ δὲ τοῦ μὲν α δ ε τριγώνου ἐπίτριτον τὸ

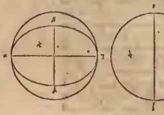


α δ ε τμᾶμα. τοῦ δὲ θ β γ τριγώνου, ἐπίτριτον τὸ θ β γ τμᾶμα. δῆλον οὖν ὅτι τὰ τμάματα ἐντὶ ἴσα, καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ἐγγραφόμενα εἰς αὐτά. ἀλλὰ μὰν ἑκάτερα τᾶν τὰ τμάματα ἀποτεμνουσᾶν ποτ᾽ ὀρθὰς ἐντὶ τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπολαφθείσας ἀπὸ τᾶς μετὰ τᾶς τῶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἴσας τᾷ διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ἑνὸς τμάματος, καὶ ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἀπολαφθείσας ποτ᾽ ὀρθὰς ἀχθείσας τᾷ διαμέτρῳ τὸ γινόμενον τμᾶμα, ἑκατέρῳ τῶν τμαμάτων ἴσον ἐσσεῖται. δῆλον οὖν ἐστὶ τὸ προτεθέν.

6 Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον ἴσαν τᾷ μείζονι διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν μείζω, τουτέστι ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον. ἔστω γὰρ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἐφ᾽ ἇς τὰ α β γ δ. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μὲν μείζων ἔστω, ἐφ᾽ ἇς τὰ α γ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἐφ᾽ ἇς τὰ β δ. ἔστω κύκλος περὶ διάμετρον τὰν α γ, δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν γ α, τουτέστι τὰν ε ζ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ, τοῦτον ἐχέτω ὁ κύκλος ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸν α ε γ ζ κύκλον. λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ψ κύκλος τῷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἴσος ὁ ψ κύκλος τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων. δυνατὸν δή ἐστιν εἰς τὸν ψ κύκλον πολύγωνον ἐγγράψαι ἀρτιόγωνον, μεῖζον τοῦ α β γ δ χωρίου. νοείσθω δὴ ἐγγεγραμμένον. ἐγγεγράφθω δὴ καὶ εἰς τὸν α ε γ ζ κύκλον εὐθύγραμμον, ὅμοιον τῷ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένῳ. καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ καθετοὶ ἄχθωσαν ἐπὶ τὰν α γ διάμετρον. ἐπὶ δὲ τὰ σαμεῖα καθ᾽ ἃ τέμνονται αἱ καθετοὶ ταῖς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, εὐθεῖαι ἐπιζευχθῶσαν. ἐσσεῖται δή τι εὐθύγραμμον, ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον, καὶ ἑξεῖ τὸ αὐτὸ ποτὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α ε γ ζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τὸν αὐτὸν λόγον ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ε θ, κ λ καθετοὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέτμηνται κατὰ τὰ μ β, δῆλον ὅτι τὸ λ ε τραπέζιον ποτὶ τὸ θ μ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θ ε ποτὶ τὰν β θ. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τῶν ἄλλων τραπεζίων ἕκαστον τῶν ἐν τῷ κύκλῳ ποθ᾽ ἕκαστον τῶν τραπεζίων τῶν ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε θ ποτὶ τὰν β θ. ἔχοντι δὲ καὶ τὰ τρίγωνα τὰ ποτὶ τοῖς α, γ τὰ ἐν τῷ κύκλῳ, ποτὶ τὰ ἐν τῷ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτον τὸν λόγον. ἑξεῖ οὖν καὶ ὅλον τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ α ε γ ζ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, ποτὶ ὅλον τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε ζ ποτὶ τὰν β δ. ἔχει δὲ τὸ αὐτὸ τὸ εὐθύγραμμον καὶ ποτὶ τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τοῦτον τὸν λόγον, διότι καὶ οἱ κύκλοι τοῦτον εἶχον τὸν λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ εὐθύγραμμον τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον, τῷ εὐθυγράμμῳ τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. μεῖζον γάρ ἦν ὅλου τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου τομᾶς. ἀλλ᾽ ἔστω εἰ δυνατὸν ἐλάσσων, πάλιν δὴ δυνατόν εἰς τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐγγράψαι πολύγωνον ἀρτιόπλευρον μεῖζον τοῦ ψ κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν καὶ ἀπὸ τᾶν γωνιᾶν αὐτοῦ καθετοὶ ἀχθῶσαι ἐπὶ τὰν α γ. ἐκβεβλήσθωσαν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πάλιν οὖν ἐσσεῖται τὸ ἐν τῷ δ ε κύκλῳ εὐθύγραμμον ἐγγεγραμμένον, ὃ ἑξεῖ ποτὶ τὸ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε ζ ποτὶ τὰν β δ. ἐγγεγραφέντος δὴ καὶ εἰς τὸν ψ κύκλον ὁμοίου αὐτῷ, δειχθήσεται τὸ ἐν τῷ ψ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον ἴσον ἐὸν τῷ ἐν τᾷ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ ἐγγεγραμμένῳ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔστιν οὖν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ψ κύκλος τοῦ χωρίου, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς. δῆλον οὖν ὅτι τὸ εἰρημένον χωρίον ποτὶ τὸν α ε γ ζ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν ε ζ.

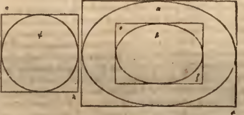


Πᾶν χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ πάντα κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ϛ ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τοῦ κύκλου διαμέτρου τετράγωνον. ἔστω γάρ τι χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἐν ᾧ τὸ χ, διάμετροι δὲ ἔστωσαν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς αἱ α γ, β δ, μείζων δὲ ἁ α γ. καὶ κύκλος ἔστω, ἐν ᾧ τὸ ψ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ ε ζ. δεικτέον ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α γ, β δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετράγωνον. περιγεγράφθω δὴ κύκλος περὶ διάμετρον τὰν α γ. τὸ δὴ χ χωρίον ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ διάμετρος ἁ α γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α γ, β δ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α γ τετράγωνον. δέδεικται γὰρ ἔχον ὃν ἁ β δ ποτὶ τὰν α γ. ἔχει δὲ καὶ ὁ κύκλος, οὗ διάμετρος ἁ α γ, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ διάμετρος ἁ ε ζ, τὸν αὐτὸν λόγον· ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α γ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε δ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ χ χωρίον ποτὶ τὸν ψ κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν α γ. β δ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετράγωνον.



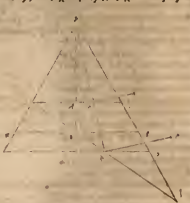
Τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἄλλαλα, ὃν τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τμαμάτων ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν ποτ' ἄλλαλα. ἔστω περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν. ἐν οἷς τὰ α, β. ἔστω δὲ καὶ τὸ μὲν γ δ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τᾶς περιεχούσας τὸ α χωρίον, τὸ δὲ ε ζ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων τᾶς ἑτέρας τομᾶς. δεικτέον ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ ε ζ. λελάφθω δὴ κύκλος τις, ἐν ᾧ τὸ ψ. ἀπὸ δὲ τᾶς διαμέτρου αὐτοῦ τετράγωνον ἔστω τὸ κ λ. ἔχει δὲ τὸ α χωρίον, ποτὶ τὸν ψ κύκλον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ κ λ. ὁ δὲ ψ κύκλος ποτὶ τὸ β χωρίον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ κ λ ποτὶ τὸ ε ζ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ γ δ ποτὶ τὸ ε ζ. ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ ὁμοιᾶν ὀξυγωνίων κώνων τομᾶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἄλλαλα, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι τᾶν τομᾶν.

τὰν τῶν



Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀνεστακούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δεδόσθω τις ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτᾶς ἀνεστακεῖσα γραμμὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διὰ δὲ τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, καὶ τᾶς ἐλάσσονος διαμέτρου ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω ἐν αὐτῷ ἁ μὲν ἐλάσσων διάμετρος ἁ α β. τὸ δὲ κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ δ. ἁ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ἁ γ δ. πέρας δὲ αὐτᾶς τὸ γ. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν α β ἐγγεγραμμένα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὰν γ δ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τᾷ α β εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ α διήχθω ἁ α ζ. ὥστε τὸ περιεχόμενον η

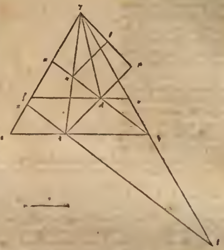
ὑπὸ τῶν ε ι, ε ζ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας μάζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ δ γ τετράγωνον. δυνατὸν δή ἐστιν, ἐπεὶ μάζων ἐστὶν ὁ λόγος τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶς α δ, δ β περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ τετράγωνον. ἀπὸ δὲ τᾶς α ζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντι αἱ γ α ζ. ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν α ζ, ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κῶνος ἔστω, κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, λειφθήσεται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὴ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἀναγκαῖον εἶμεν τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ μή ἐστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω δὴ τὸ σαμεῖον, λελαμμένον ἐπὶ



τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ θ κ, ἐπὶ τὰν α β. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ἐν ᾧ ἐντι ἁ γ α ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπὶ τὸ κ εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. συμπεσεῖται δὴ αὐτὰ τᾷ α ζ, κατὰ τὸ λ. καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζ α, ἁ λ μ, ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν α ζ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐπὶ τᾶς περιφερείας αὐτοῦ. ἄχθω δὲ καὶ παρὰ τὰν α β, διὰ μὲν τοῦ λ ἁ ξ ο, διὰ δὲ τοῦ ε, ἁ π ρ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ τᾶν ε α, ε ζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε γ τετράγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μάζονος διαμέτρου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ε γ ποτὶ τὸ ὑπὸ ε π, ε ρ. καὶ ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς δ γ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν α ε, ε ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν π ε, ε ρ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μάζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β. ἔστι δὲ ὡς μὲν τὸ ὑπὸ τᾶν α ε, ε γ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ε π, ε ρ, οὕτω τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν λ ξ, λ ο. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς ἡμισείας τᾶς μάζονος διαμέτρου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β. τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξ λ, λ ο, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξ λ, λ ο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ κ τετράγωνον. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γ λ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν α λ, λ ζ περιεχομένῳ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον. ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ τῷ περὶ τὰν α ζ κάθετος ἄχθη ἁ λ μ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λ μ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λ γ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ γ. ὥστε ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τὰ γ θ μ σαμεῖα. ἁ δὲ γ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν, οὐκ ἄρα ἐστὶ σαμεῖον οὐδὲν ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ προειρημένου κώνου. ὅλα οὖν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κώνου.

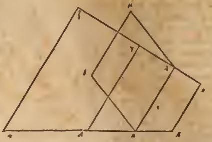
θ Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς μὴ ὀρθᾶς ἀνεστακούσας, ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐν ἐπιπέδῳ ἐστὶν ὀρθὸν ἀνεστακὸς, διὰ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, δυνατόν ἐστι κῶνον εὑρεῖν, κορυφὰν ἔχοντα τὸ πέρας τᾶς ἀνεστακούσας εὐθείας, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω δὲ διάμετρος μὲν τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ β α, κέντρον δὲ τὸ δ. καὶ ἁ δ γ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακοῦσα, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν α β ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντι αἱ α β, γ δ. δεῖ δὴ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

νου τομά. οὐ δεῖ γάρ ἐντι ἴσαι αἱ αγ, γβ. ἐπεὶ ἁ γδ οὐκ ἔστιν ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω ἴσα ἁ εγ τᾷ γβ. ἁ δὲ ν δυνάμει ἴσα ἔστω τᾷ ἡμισέᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ᾇ ἐστι συζυγὴς ἁ αβ. καὶ διὰ τοῦ δ ἄχθω ἁ ζκ παρὰ τὰν εβ. ἀπὸ δὲ τᾶς εβ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντι αἱ αγ, γβ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν εβ κύκλος, ἢ ἔλλειψις. εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ν, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζδ, δκ, κύκλος. εἰ δὲ μή ἐστιν ἴσον, ὀξυγωνίου κώνου τομὰ τοιαύτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς εβ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζδ, δκ. κῶνος λελάφθω κορυφὰν ἔχων τὸ γ σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ὁ κύκλος, ἢ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν εβ. δυνατὸν δέ ἐστι τοῦτο, ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ γ ἐπὶ μέσαν τὰν εβ ἀχθεῖσα ὀρθά ἐντι ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν εβ. ἐν ταύτᾳ δὲ τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν αβ. εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἔσται ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. νοείσθω τι σαμεῖον λελαμμένον τὸ θ, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἁ κθ ἐπὶ τὰν αβ, ἁ δὲ γκ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τᾷ εβ κατὰ τὸ λ. διὰ δὲ τοῦ λ ἄχθω τις ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰν εβ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ εβ, ἁ λμ. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου. ἄχθω δὲ καὶ διὰ τοῦ λ παρὰ τὰν αβ ἁ πρ. ἐσσεῖ δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζδ, δκ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λμ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ελ, λβ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ζδ, δκ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ, οὕτως τὸ ὑπὸ ελ, λβ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ. ἐσσεῖται οὖν ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ περιεχόμενον, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς λμ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ. ἔχει δὲ ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ν τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν αδ, δβ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς θκ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ. ἐπεὶ ἐν τᾷ αὐτᾷ ὀξυγωνίου κώνου τομᾷ κάθετοί ἐντι ἀγμέναι ἐπὶ διάμετρον τὰν αβ, τὸν αὐτὸν ἄρα ἔχει λόγον τὸ ἀπὸ τᾶς λμ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶς ακ, κβ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν πλ, λρ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς γλ τετράγωνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ακ, κβ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κγ. τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς λμ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς λγ τετράγωνον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κγ. ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας ἐντὶ τὰ γ, θ, μ σαμεῖα. ἁ δὲ γμ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ θ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τοῦ κώνου. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν, φανερὸν οὖν ἐστὶ τὸ ὃ ἔδει δεῖξαι.



Ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς δοθείσας, καὶ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου ε
τομᾶς ἀνεστακούσας ἐν ἐπιπέδῳ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ὀρθὸν ἀνεστακὸς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατόν ἐντι κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ᾽ εὐθείας τᾷ ἀνεστακούσᾳ γραμμᾷ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἔστω τᾶς δοθείσας τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἑτέρα διάμετρος ἁ βα. κέντρον δὲ τὸ δ. ἁ δὲ γδ γραμμὰ ἔστω ἀνεστακοῖσα ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς εἴρηται. ἁ δὲ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ νοείσθω περὶ διάμετρον τὰν αβ ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντι αἱ αβ, γδ. δεῖ δὴ κύλιν-

δὴ κύλινδρον εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ᾽ εὐθείας τᾷ γ δ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ δοθεῖσα τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἀπὸ δὴ τῶν α, β σαμείων ἄχθων παρὰ τὰν γ δ αἱ α ζ, β η. ἁ δὴ ἑτέρα διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἤτοι ἴσα ἐντὶ τῷ διαστήματι τᾶν α ζ, β η, ἢ μείζων ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον ἴσα τᾷ ζ η. ἁ δὲ ζ η ἔστω ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ γ δ. ἀπὸ δὲ τᾶς ζ η, ἀνεστακέτω ἐπίπεδον ὀρθὸν ποτὶ τὰν γ δ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος, ἔστω περὶ διάμετρον τὰν ζ η. καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν γ δ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ



τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μὴ ἐσσεῖται, ἐσσεῖταί τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ὃ οὐκ ἐσσεῖ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. νοείσθω δή τι σαμεῖον λελαμμένον ἐπὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸ θ, ὃ οὐκ ἐστὶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. καὶ ἀπὸ τοῦ θ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν α β ἁ θ κ. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α β, γ δ. ἀπὸ δὲ τοῦ κ ἄχθω παρὰ τὰν γ δ ἁ κ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἀνεστακέτω ἁ λ μ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ ζ η ἐν τῷ κύκλῳ τῷ περὶ τὰν ζ η. τὸ δὲ μ νοείσθω μετέωρον ἐν τᾷ περιφερείᾳ τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ διάμετρον τὰν ζ η. τὸ αὐτὸ δὴ ἔχει λόγον τὸ τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ καθέτου, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β περιεχόμενον, ᾧ τὸ ἀπὸ ζ γ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α δ, δ β περιεχόμενον. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζ η τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ λ, λ η περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ α κ, κ β περιεχόμενον λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ζ γ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ α δ δι᾽ ἐλλείψιος. ἴσον οὖν ἐντὶ τὸ ὑπὸ τᾶς ζ λ, λ η περιεχόμενον, τῷ ἀπὸ τᾶς θ κ τετραγώνῳ. ἔστι δὲ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ λ μ, ἴσαι ἄρα ἐντὶ αἱ θ κ, μ λ κάθετοι. παράλληλοι οὖν ἐντὶ αἱ λ κ, μ θ. ὥστε καὶ αἱ δ γ, μ θ παράλληλοι ἐντὶ καὶ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου ἁ θ μ. ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ μ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐόντος ἆκται παρὰ τὸν ἄξονα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐστὶν αὐτοῦ. ὑπέκειτο δὲ μὴ εἶμεν. φανερὸν οὖν ἐστὶν ὃ ἔδει δεῖξαι. δῆλον δή, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ περιλαμβάνων τὰν ἔλλειψιν, ὀρθὸς ἐσσεῖται. εἴκα ἁ ἑτέρα διάμετρος ἴσα τῷ διαστήματι τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἑτέρας διαμέτρου ἀγμένας παρὰ τὰν ἀνεστακοῦσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω πάλιν ἑτέρα διάμετρος μείζων τᾶς ζ η, καὶ ἴσα ἔστω ἁ π ζ τᾷ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ. ἀπὸ δὲ τᾶς π ζ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθόν, ποτὶ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ β γ δ. καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κύκλος ἔστω περὶ διάμετρον τὰν π ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὰν δ ρ. ἐν

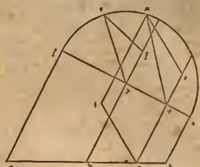


δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου, διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται οὖσα ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά.

Ἀλλ᾽ ἔστω ἐλάσσων ἁ ἑτέρα διάμετρος τᾶς ζ η, ἁ δὴ μείζων δυνάσθω ἁ ζ γ τᾶς ἡμισείας τᾶς

ἑτέρας

ἑτέρας διαμέτρου. ἔστω τὸ ἀπὸ τᾶς γ ξ τετράγωνον. καὶ ἀπὸ τοῦ ξ ἀνεστακέτω γραμμὰ ἴσα τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου, ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α β, γ δ, ἁ ξ ν. τὸ δὲ ν νοείσθω μετέωρον. ἁ δὴ γ ν ἴσα ἐντὶ τᾷ γ ζ. ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ ζ κ, γ ν κύκλος γεγράφθω περὶ διάμετρον τὰν ζ κ. ἔχει δὴ οὗτος διὰ τοῦ ν, καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου κύλινδρος ἔστω ἄξονα ἔχων τὰν γ δ. ἐν δὴ τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ γὰρ μὴ ἐσσεῖται, ἐσσεῖται τι σαμεῖον ἐπ' αὐτᾶς, ὃ οὐκ ἔστιν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου. λελάφθω δὴ τι σαμεῖον



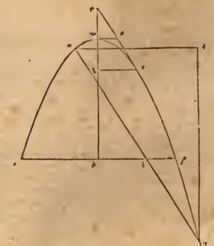
ἐπ' αὐτᾶς τὸ θ. καὶ ἁ θ κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν α β. καὶ ἀπὸ τοῦ κ παρὰ τὰν γ δ ἔστω ἁ κ λ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ζ κ ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ περὶ διάμετρον τὰν ζ μ κ, ἁ λ μ. νοείσθω δὲ τὸ μ ἐπὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ περὶ τὰν ζ ν. καὶ ἀπὸ τοῦ μ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν κ λ ἐκβληθεῖσαν, ἁ μ ο. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ α β, γ δ. ἐπεὶ ποτ' ὀρθάς ἐντι ἁ κ λ τᾷ ζ κ. ἐστὶν δὴ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τᾶς μ ο ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς μ λ, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ξ ν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ν γ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τᾶς μ λ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β, οὕτως τὸ ἀπὸ γ ν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α δ. ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς μ λ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τᾶν λ ζ, λ κ περιεχομένῳ. τῷ δὲ ἀπὸ τᾶς γ ν τὸ ἀπὸ τᾶς γ ζ. ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς μ ο τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β, οὕτως τὸ ἀπὸ τᾶς ν ξ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α δ. ἐντὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ τετράγωνον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α κ, κ β, ὡς τὸ ἀπὸ τᾶς ξ ν ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α δ. ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ξ ν τᾷ ἡμισείᾳ τᾶς ἑτέρας διαμέτρου. δῆλον οὖν ὅτι ἴσαι ἐντὶ αἱ μ ο, θ κ κάθετοι. ὥστε ἴσαι αἱ κ θ, θ μ. ἐπεὶ δὲ ἁ μ θ παρὰ τὸν ἄξονα ἐντὶ τοῦ κυλίνδρου, καὶ τὸ μ σαμεῖον ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, ἀναγκαῖον καὶ τὰν μ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ θ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντὶ αὐτοῦ. οὐκ ἦν δέ. δῆλον οὖν ὅτι ἀναγκαῖον ἐστὶ τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ εἶμεν τοῦ κυλίνδρου.

Ὅτι μὲν πᾶς κῶνος ποτὶ κῶνον τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ τῶν βάσιων λόγου, καὶ ἐκ τῶν ὑψέων, ἀποδέδεικται ὑπὸ τῶν πρότερον. ἁ αὐτὰ δὲ ἀπόδειξίς ἐντι. καὶ διότι πᾶν ἀπότμαμα κώνου ποτὶ ἀπότμαμα κώνου τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει, ἔκ τε τοῦ τῶν βάσιων λόγου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων. καὶ ὅτι πᾶς τόμος κυλίνδρου, τριπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τόμῳ, καὶ ὕψος ἴσον, ἁ αὐτὰ ἀπόδειξις, ἅπερ καὶ ὅτι ὁ κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ια

Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομὰ αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἐσσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἀχθέντος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ τέμνον. εἰ δέ κα τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα, εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ. εἰ δὲ καὶ διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, οὐχ ὁμοία. διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται, ἁ κοινὰ τομὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἴκα τμαθῇ ὀρθῷ τῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. εἰ μὲν καὶ διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτὰ ἁ περιλαμβάνουσα τὸ σχῆμα. εἰ δὲ καὶ παρὰ τὸν ἄξονα ὁμοία αὐτᾷ, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς ἐσσεῖται ἁ κοινὰ τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέν-

τος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἰ δὲ καὶ τμαθῇ τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα κύκλος ἐσσεῖται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος. εἴκα τῶν εἰρημένων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, αἱ ἀπὸ τῶν σαμείων τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ σχήματος μὴ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐόντων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἐντὸς πεσοῦνται τᾶς τοῦ σχήματος τομᾶς. τούτων δὲ πάντων φανερόν ἐστι αἱ ἀποδείξιες.

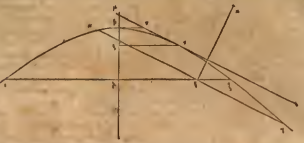
ιγ Εἴκα τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μήτε διὰ τοῦ ἄξονος, μήτε παρὰ τὸν ἄξονα, μήτε ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ, ἀπὸ τᾶς γινομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐσσεῖται τῷ διαστήματι τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα, ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς μείζονος διαμέτρου. τετμάσθω γὰρ τὸ ὀρθογώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἄλλῳ, διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἔστω τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἁ α β γ, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ κωνοειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. δεικτέον ὅτι ἁ τομὰ τοῦ κωνοειδέος, ἁ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὰν α γ, ὀξυγωνίου ἐστὶ κώνου τομά. καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ μείζων ἐστὶν ἁ α γ. ἁ δὲ ἐλάσσων διάμετρος ἴσα ἐστὶ τᾷ λ α, τᾶς μὲν γ λ παρὰ τὰν β δ ἐούσας, τᾶς δὲ α λ καθέτου ἐπὶ τὰν γ λ. νοείσθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν γ α, ἁ κ θ. ἐσσεῖται δὴ ἁ κ θ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐστιν ἁ α γ β ὀρθογωνίου κώνου τομά. διότι καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. διὰ δὲ τοῦ



θ ἄχθω ἁ ε ζ ὀρθὰς ποιοῦσα γωνίας ποτὶ τὰν β δ. καὶ διὰ τᾶν ε ζ, κ θ εὐθειᾶν ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω. ἐσσεῖται δὲ τοῦτο ὀρθὸν ποτὶ τὰν β δ. τετμάσεται δὲ τὸ κωνοειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται. κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ δ. ἁ ἄρα κ θ ἴσον δυνασεῖται τῷ ὑπὸ ζ θ, θ ε. ἡμικύκλιον γάρ ἐστι τὸ ἐπὶ τᾶς ε ζ. καὶ ἁ κ θ κάθετος οὖσα, μέση ἐστὶ ἀνὰ λόγον τῶν ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ περιεχομένων. ἄχθω δὴ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ μὲν μ ν παρὰ τὰν α γ, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ ν. ἁ δὲ β τ παρὰ τὰν ε ζ. τὸ δὴ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ν τ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β τ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. τᾷ δὲ ν τ ἴσα ἐστὶν ἁ τ μ. διότι καὶ ἁ β ρ τᾷ β μ. ἔχει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς τ μ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ β. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ κ καθέτου τετράγωνον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ περιεχόμενον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ μ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιά ἐστι τὰ γ α λ, τ μ β τρίγωνα, ὁμοίως δειχθήσονται καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλων καθέτων τετράγωνα, τᾶν ἀγομένων ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ, ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς α γ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α λ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς α γ. δῆλον οὖν ὅτι ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἐστὶν ἁ μὲν μείζων ἁ α γ, ἁ δὲ ἐλάσσων ἴσα τᾷ α λ.

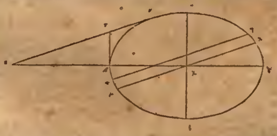
ιδ Εἴκα τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ συμπίπτοντι πάσαις ταῖς τοῦ κώνου πλευραῖς τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, μὴ ποτ᾽ ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διά-

μα. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀπὸ τᾶς γινομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων, τοῦ τε τέμνοντος τὸ σχῆμα καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. τετμάσθω γὰρ τὸ ἀμβλυγώνιον κωνοειδὲς ἐπιπέδῳ, ὡς εἴρηται. καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν κωνοειδέος τομὰ ἔστω ἁ α β γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ τέμνοντος τὸ σχῆμα ἐπιπέδου ἁ α γ εὐθεῖα. ἄξων δὲ τοῦ κωνοειδέος,



καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ β δ. νοείσθω δή τι ἐπὶ τᾶς τομᾶς λελαμμένον σαμεῖον τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ κάθετος ἄχθω ἐπὶ τὰν α γ, ἁ κ θ. ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὀρθὰ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐν ᾧ ἐντὶ ἁ α β γ κώνου τομά. διὰ δὲ τοῦ θ ἄχθω ἁ ε ζ ποτ' ὀρθὰς τᾷ β δ. καὶ διὰ τᾶν ε ζ, κ θ ἐπιζευχθὲν ἐπίπεδον ἄχθω, τέμνον τὸ κωνοειδές. τετμάσεται δὴ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ὥστε ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ δ. ἁ ἄρα κάθετος ἁ κ θ ἴσον δυνασεῖται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ε θ, θ ζ. ἄχθω δὲ πάλιν ἁ μὲν μ ν παρὰ τὰν α γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ ν. ἁ δὲ β τ παρὰ τὰν ε ζ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ ε θ, θ ζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β τ πρὸς τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὥστε τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ καθέτου τετράγωνον ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν α θ, θ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὁμοίως δὲ δειχθησοῦντι, καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἄλλαν καθετᾶν τᾶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἀγομένων, ἐπὶ τὰν α γ ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς α γ, ὧν αἱ κάθετοι ποιοῦντι τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. καὶ ἔστιν ἐλάσσων ἁ β τ τᾶς τ ν. διότι καὶ ἁ μ τ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς τ ν. καὶ γὰρ ἁ μ β, ἐλάσσων τᾶς β ρ. τοῦτο γὰρ ἐστὶν ἐν ταῖς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομαῖς συμπίπτοντι. δῆλον ὅτι ἁ τομά, ὀξυγωνίου κώνου ἐστὶ τομά. ἐστὶ διάμετρος αὐτᾶς μείζων ἁ α γ. ὁμοίως καὶ ὅσαις τᾶς ν ρ ἐν τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ. διάμετρος ταύτας μείζων ἐστὶν ἁ γ λ.

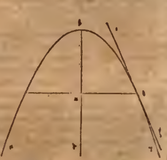
Εἴκα καὶ τὸ παραμακὲς σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, μὴ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ἁ τομὰ ἐσ-
ιθ σεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἐσσεῖται, ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ ἀπὸ τᾶς γινομένας τομᾶς τῶν ἐπιπέδων τοῦ τέμνοντος τὸ σχῆμα, καὶ τοῦ ἀχθέντος διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον. εἰ μὲν οὖν κατατμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα δῆλον. τετμάσθω δὲ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον, τοῦ σφαιροειδέος τομά. ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος αὐτὸ ἐπιπέδου, ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω



τοῦ σφαιροειδέος, καὶ διάμετρος τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἁ β δ. κέντρον δὲ τὸ χ. καὶ ἐλάσ-

σεων διάμετρος ἴσα ἁ π ρ. ἄχθω δὲ ἁ μὲν β τ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ β δ, ἁ δὲ π ν παρὰ τὰν α γ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ ν. ἄχθω δὲ καὶ ἁ ν λ διὰ τοῦ χ παρὰ τὰν α γ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν καθέτων τῶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ, ἀγομένας ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τᾶς α γ τμαμάτων, τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἐν τῷ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὅτι μὲν οὖν ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, καὶ διάμετρος αὐτᾶς ἁ γ α, δῆλον. ὅτι δὲ μείζων, δεικτέον. τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν π χ, χ ρ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ μ χ, χ λ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς β τ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ν τ. ἐπεὶ παρὰ τὰς ἐπιψαυούσας ἐντὶ αἱ π ρ, μ λ. ἔλασσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ τᾶν π χ, χ ρ περιεχόμενον τοῦ ὑπὸ τᾶν μ χ, χ λ. ἐπεὶ καὶ ἁ χ π τᾶς χ λ. ἔλασσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τ τετράγωνον, τοῦ ἀπὸ τᾶς τ ν. ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν καθέτων τετράγωνα τῶν ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν α γ ἀγομέναν ἐλάσσων ἐντὶ τῶν ὑπὸ τῶν τμαμάτων τᾶς α γ περιεχόμενα. δῆλον οὖν ὅτι μείζων ἐστὶ διάμετρος ἁ γ α, εἴκα τὸ ἐπιπλατυσφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθῇ, τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ἐσσεῖται. τᾶν δὲ διαμέτρων ἐλάσσων ἐσσεῖται ἁ ἐναπολαφθεῖσα ἐν τῷ σφαιροειδεῖ. δῆλον δὲ φανερὸν ἐν πᾶσι τοῖς σχημάτεσσιν, ὅτι εἴκα παραλλήλοις ἐπιπέδοις τμαθῇ, αἱ τῶν τομαὶ ὁμοῖαι ἐσσοῦνται. τὰ γὰρ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν καθέτων ποτὶ τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦντι.

ις Εἴκα τῷ ὀρθογωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς ὁτουοῦν σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ τοῦ κωνοειδέος ταὶ ἀγομέναι εὐθεῖαι παρὰ τὸν ἄξονα, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἅ ἐντι τὰ κυρτὰ αὐτοῦ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ σαμείου, ἀφ᾽ οὗ ἁ παράλληλος ἄγεται τῷ ἄξονι τομὰ ἐσσεῖται ὀρθογωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ὁ ἄξων τοῦ κωνοειδέος. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ, ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐπὶ τᾶς τομᾶς ἀγομέναι παρὰ τὰν διάμετρον εὐθεῖαι, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι ἐφ᾽ ἅ ἐντι τὰ κυρτὰ αὐτᾶς, ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ τὰ θάτερα ἐντός. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν. ἐν τῷ ἀμβλυγωνίῳ κωνοειδεῖ ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ ταὶ ἀγομέναι εὐθεῖαι παρά τινα γραμμάν, ἅ ἐστιν ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἅ ἐντι τὰ κυρτὰ αὐτοῦ ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ κωνοειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. ἀχθέντος γὰρ ἐπιπέδου διά τε τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένας διὰ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, καὶ διὰ τοῦ σαμείου ἀφ᾽ οὗ ἄγεται ἁ εὐθεῖα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ἀμβλυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου ἐν τῷ κωνοειδεῖ ἀγομένα. ἐν δὲ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ ἀπὸ παντὸς σαμείου τῶν ἐπὶ τᾶς τομᾶς ταὶ ἀγομέναι εὐθεῖαι παρὰ τὰν οὕτως ἀγομέναν γραμμάν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀγόμεναι, ἐφ᾽ ἅ ἐστιν αὐτᾶς τὰ κυρτὰ ἐκτὸς πίπτοντι, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός. εἴκα τῶν κωνοειδέων σχημάτων ἐπίπεδον ἐφάπτηται, μὴ τέμνον τὸ κωνοειδές, καθ᾽ ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον. καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ἐφαπτέσθω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ δύο σαμείων καθ᾽ ἃ ἅπτεται τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος, καὶ ἀφ᾽ ἑκατέρου παρὰ τὸν ἄξονα εὐθεῖαι ἀχθεισῶν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν παρὰ τὸν ἄξονα ἐπίπεδον ἐκβληθέν, ἤτοι διὰ τοῦ ἄξονος, ἢ παρὰ τὸν ἄξονα ἐσσεῖται ἀγμένον. ὥστε τὰν τομὰν ποιήσει κώνου τομάν, καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἐπεὶ οὖν ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐντί, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ὥστε καὶ τᾶς τοῦ κωνοειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἐστι δὲ ἁ εὐθεῖα αὐτὰ ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ. διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ ἄρα ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ κωνοειδέος, ὅπερ ἀδύνατον. ὑπέκειτο γάρ, μὴ τέμνειν. καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον ἅψεται σαμεῖον. ὅτι δὲ καὶ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος, ἐφάπτεται δῆλον. ἀχθέντων γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος δύο ἐπι-



δύο ἐπιπέδων τοῦ κωνοειδέος αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται κώνων τομαί, διαμέτρους ἔχουσαι τὸν ἄξονα. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου αἱ εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι ταῖν τῶν κώνων τομαῖν κατὰ τὸ πέρας τᾶς διαμέτρου ὀρθὰς ποιοῦντι γωνίας ποτὶ τὰν διάμετρον. ἐσσοῦνται οὖν ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὀρθὸν οὖν ἐσσεῖται ποτὶ τὸν ἄξονα τὸ ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος. ἀλλὰ ἔστω μὴ κατὰ τὰν κορυφὰν τοῦ κωνοειδέος ἐπιψαῦον τὸ ἐπίπεδον. ἄχθω δὲ ἐπίπεδον διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος. καὶ τοῦ μὲν κωνοειδέος τομά, ἔστω ἁ βγ κώνου τομά. ἄξων δὲ ἔστω καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς ἁ βδ. τοῦ δὲ ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου τομά, ἔστω ἁ εθζ εὐθεῖα, τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἁπτομένα κατὰ τὸ θ. ἀπὸ δὲ τοῦ θ καθετὸς ἄχθω ἐπὶ ταὰν βδ, ἁ θκ καὶ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω ὀρθὸν ἐπὶ τὸν ἄξονα. ποιήσει δὲ αὐτὸ ταὰν τομὰν κύκλον, οὗ κέντρον τὸ κ. ἁ δὲ τομὰ τούτου τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιψαύοντος ἐσσεῖται ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου, ὀρθὰς ἄρα ποιήσει γωνίας ποτὶ ταὰν θκ. ὥστε ὀρθὰ ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, τῷ ἐν ᾧ ἐντὶ αἱ κθ, βδ. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἐπεὶ καὶ αἱ ἐν αὐτῷ εὐθεῖαι.

Εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποτερονοῦν ἐπίπεδον ἅπτηται μὴ τέμνον τὸ σχῆμα, καθ' ἓν μόνον ἅψεται σαμεῖον, καὶ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθὲν ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ἁπτέσθω γὰρ κατὰ πλείονα σαμεῖα. λαφθέντων δὲ τῶν σαμείων καθ' ἃ ἅπτεται τὸ ἐπίπεδον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἀφ' ἑκατέρου αὐτῶν παρὰ τὸν ἄξονα εὐθεῖαι ἀχθεῖσι, καὶ διὰ τῶν ἀχθεισᾶν ἐπιπέδου ἐκβληθέντος ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. καὶ τὰ σαμεῖα ἐσσοῦνται ἐν τᾷ τοῦ κώνου τομᾷ. ἁ οὖν μεταξὺ τῶν σαμείων εὐθεῖα ἐντὸς ἐσσεῖται τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. ὥστε καὶ τᾶς τοῦ σφαιροειδέος ἐπιφανείας ἐντὸς ἐσσεῖται. ἐστὶ δὲ ἁ εὐθεῖα ἐν τῷ ἐπιψαύοντι ἐπιπέδῳ, διότι καὶ τὰ σαμεῖα. τοῦ οὖν ἐπιψαύοντος ἐπιπέδου, ἐσσεῖταί τι ἐντὸς τοῦ σφαιροειδέος. οὐκ ἔστι δέ, ὑπέκειτο γὰρ μὴ τέμνειν. δῆλον οὖν ὅτι καθ' ἓν σαμεῖον μόνον ἅψεται. ὅτι δὲ τὸ διὰ τᾶς ἁφᾶς, καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἀχθέν, ὀρθὸν ἐσσεῖται ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπιψαῦον, ὁμοίως δείκνυται τοῖς ἐπὶ τῶν κωνοειδέων σχημάτων. εἴκα τῶν σφαιροειδέων σχημάτων ὁποιονοῦν ἐπιπέδῳ τμαθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ τᾶς γενομένας τομᾶς ἐπιψαύουσά τις ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ διὰ τᾶς ἐπιψαυούσας ἐπίπεδον ἀνασταθῇ ὀρθὸν ποτὶ τὸ τέμνον, ἐπιψαυσεῖ τοῦ σχήματος κατὰ τὸ αὐτὸ σαμεῖον, καθ' ὃ καὶ ἁ εὐθεῖα ἐπιψαύει τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. οὐ γὰρ ἅψεται κατ' ἄλλο σαμεῖον τᾶς ἐπιφανείας αὐτοῦ. εἰ δὲ μή, ἁ ἀπὸ τοῦ σαμείου καθετὸς ἀγομένα ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον πεσεῖται ἐντὸς τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. ἐπεὶ γὰρ ταὰν ἐπιψαύουσαν πεσεῖται, ἐπεὶ ὀρθὰ ποτ' ἄλλαλα ἐντὶ τὰ ἐπίπεδα, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ὅτι ἐντὸς πεσεῖται. ιζ

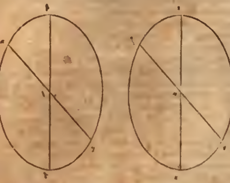
Εἴκα τῶν σφαιροειδέων τινὸς σχημάτων δύο ἐπίπεδα παράλληλα ἐπιψαύοντι, ἁ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος πορεύσεται. ὅτι μὲν οὖν κατ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι τὰ ἐπίπεδα ἐντὶ δῆλον. ἀλλ' ἔστω μὴ ποτ' ὀρθάς. τὸ δὴ ἐπίπεδον τὸ ἀχθὲν διὰ τοῦ ἄξονος καὶ τᾶς ἁφᾶς τᾶς ἑτέρας, ὀρθὸν ἐσσεῖται πρὸς τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ ποτὶ τὸ παράλληλον αὐτῷ. ἀναγκαῖον ἄρα τὸ αὐτὸ εἶμεν ἐπίπεδον, ὃ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἑκατέρας ἁφᾶν ἀγμένον. εἰ δὲ μή, ἐσσοῦνται δύο ἐπίπεδα ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ὀρθὰ διὰ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ἀγμένα. οὐκ ἐούσας ὀρθᾶς ποτὶ τὸ ἐπίπεδον. ὑπέκειτο γὰρ ὁ ἄξων μὴ εἶμεν ὀρθὸς ποτὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα ἐσσοῦνται ἐπιπέδῳ ὅ τε ἄξων καὶ αἱ ἁφαί, καὶ τετμηκὸς ἐσσεῖται τὸ σφαιροειδὲς διὰ τοῦ ἄξονος. ἁ οὖν τομὰ ἐσσεῖται, ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιψαυουσᾶν ἐπιπέδων τομαὶ παράλληλοι ἐσσοῦνται αἱ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰς ἁφὰς τῶν ἐπιπέδων. εἰ δέ κα δύο εὐθεῖαι ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἐπιψαύοντι παράλληλοι ἐοῦσαι τό τε κέντρον τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, καὶ αἱ ἁφαὶ ἐπ' εὐθείας ἐντί. ιη

Εἴκα τοῦ σφαιροειδέος σχήματος ὁποτερονοῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα ἀχθῇ ἐπιψαύοντα, ἀχθῇ δέ τι ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος παρὰ τὰ ἐπιψαύοντα, αἱ διὰ τᾶς γενομένας τομᾶς ἀγόμεναι παρὰ ταὰν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. ὑποκείσθω τὰ εἰρημένα, καὶ λελάφθω τι σαμεῖον ἐπὶ τᾶς γενομένας τομᾶς. καὶ διὰ τοῦ γενομένου σαμείου, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσας ἐπίπεδον ἄχθω. τέμνει δὲ αὐτὸ τὸ σφαιροειδὲς καὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα. ἔστω οὖν ἁ μὲν τοῦ ιθ



σφαιροειδέος τομὰ ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. αἱ δὲ τῶν ἐπιπέδων τῶν ἐπιψαυόντων τομαί, αἱ ε ζ, η θ εὐθεῖαι. τὸ δὲ λαφθὲν σαμεῖον, τὸ α. ἁ δὲ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα ἔστω ἁ β δ. πεσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου. ἁ δὲ τοῦ παραλλάλου ἐπιπέδου τοῖς ἐπιψαυόντεσσιν ἐπιπέδοις τομὰ ἁ γ α. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένα, ἐπεὶ καὶ τὸ ἐπίπεδον. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ἁ α β γ δ, ἤτοι κύκλος ἢ ὀξυγωνίου κώνου τομά. καὶ ἐπιψαύοντι αὐτᾶς αἱ δύο εὐθεῖαι αἱ ε ζ, η θ. διὰ δὲ τοῦ κέντρου παράλληλος αὐταῖς ἁ α γ. δῆλον ὡς αἱ ἀπὸ τῶν α γ ἀγόμεναι σαμείων παρὰ τὰν β δ ἐπιψαύοντι τᾶς τομᾶς, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος. εἰ δὲ καὶ τὸ παράλληλον ἐπίπεδον τοῖς ἐπιψαύουσι σαμείοις, μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἀγμένον, ἦ ὡς τὸ κ λ. δῆλον ὡς τὰν ἀπὸ τᾶς τομᾶς τὰν γινομέναν εὐθεῖαν, αἱ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ γινόμεναι τῷ ἐλάσσονι τμάματι, ἐκτὸς πεσοῦνται τοῦ σφαιροειδέος, αἱ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐντός.

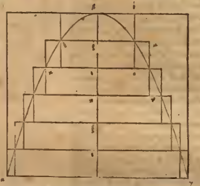
κ Πᾶν σχῆμα σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ τμαθὲν διὰ τοῦ κέντρου, δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι δὴ καὶ διὰ τοῦ ἄξονος ἐσσεῖται τετμημένον, ἢ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ ἄξονος τέμνεται, ἢ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, δῆλον ὡς δίχα τέμνεται τό τε αὐτὸ καὶ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ. φανερὸν γὰρ ὅτι ἐφαρμόζει τὸ ἕτερον μέρος αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἕτερον, καὶ ἁ ἐπιφάνεια τοῦ ἑτέρου μέρεος ἐπὶ τὰν ἑτέρου. ἀλλ' ἔστω μὴ διὰ τοῦ ἄξονος τετμημένον, μήτε ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι. τμαθέντος δὴ τοῦ σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον διὰ τοῦ ἄξονος, αὐτοῦ μὲν τοῦ σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἔστω καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος, ἁ β δ. καὶ κέντρον τὸ θ. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ τετμηκότος διὰ τοῦ κέντρου τοῦ σφαιροειδέος, ἔστω τομὰ ἁ α γ εὐθεῖα. λελάφθω δὴ καὶ ἄλλο σφαιροειδές, ἴσον καὶ ὅμοιον τούτῳ. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τομά, ἔστω ἁ ε ζ η ν ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ ε η, καὶ κέντρον τὸ κ. καὶ διὰ τοῦ κ ἄχθω ἁ ζ ν γωνίαν ποιοῦσα τὰν κ, ἴσαν τᾷ θ.



ἀπὸ δὲ τᾶς ζ ν ἐπίπεδον ἔστω ἀνεστακὸς ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ ε ζ η ν τομά. ἐντὶ δὴ αἱ τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαί, αἱ α β γ δ, ε ζ η ν, ἴσαι καὶ ὅμοιαι ἀλλάλαις. ἐφαρμόζοντι οὖν ἐπ' ἀλλάλας τεθείσας τᾶς ε η ἐπὶ τὰν β δ, καὶ ἁ ζ ν ἐπὶ τὰν α γ. ἐφαρμόζει δὲ καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ν ζ τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπεὶ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς γραμμᾶς ποτὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀμφότερα ἐντί, ἐφαρμόζει οὖν καὶ τὸ τμᾶμα τὸ ὑπὸ ἐπιπέδου ἀποτεμνόμενον τοῦ κατὰ τὰν ν ζ, ἀπὸ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ἐπὶ τὰ τοῦ ε, τμάματι τῷ ἀποτεμνομένῳ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου σφαιροειδέος, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν α γ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β. καὶ λοιπὸν τμᾶμα ἐπὶ τὸ λοιπόν. καὶ ἁ ἐπιφάνεια τῶν τμαμάτων ἐπὶ τὰς ἐπιφανείας. πάλιν δὲ καὶ τεθείσας τᾶς ε η ἐπὶ τὰν β δ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν ε κατὰ τὸ δ κεῖσθαι, τὸ δὲ η κατὰ τὸ β. τὰ δὲ μεταξὺ τῶν ν ζ σαμείων γραμμὰν ἐπὶ τὰν μεταξὺ τῶν α γ σαμείων. δῆλον ὡς αὗται τῶν ὀξυγωνίων κώνων τομαὶ ἐφαρμόζοντι ἐπ' ἀλλάλας. καὶ τὸ μὲν ζ ἐπὶ τὸ γ πεσεῖται, τὸ δὲ ν ἐπὶ τὸ α. ὁμοίως καὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν ν ζ, ἐφαρμόζει τῷ ἐπιπέδῳ τῷ κατὰ τὰν α γ, καὶ τῶν τμαμάτων τῶν ἀποτεμνομένων ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν ν ζ. τὸ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ η ἐφαρμόζει τῷ τμάματι, τῷ ἀποτεμνομένῳ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κατὰ τὰν α γ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β. τὸ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ ε τῷ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ δ. ἐπεὶ δὲ τὸ αὐτὸ τμᾶμα ἑκατέρῳ τῶν τμαμάτων ἐφαρμόζει, δῆλον ὅτι ἴσα ἐντὶ τὰ τμάματα. διὰ ταῦτα δὲ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι.

Τμάματος

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων, ἀποτετμαμένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν, μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτεμνομένου, δυνατόν ἐστι τμᾶμα στερεὸν ἐγγράψαι, καὶ ἄλλο περιγράψαι ἐκ κυλίνδρων ἴσον ὕψος ἐχόντων τῶν συγκειμένων. ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ἐλάσσονι ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμᾶμα, οἷον ἐστὶ τὸ α β γ. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τμάματος, τομὰ ἔστω ἁ α β γ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ α γ εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος καὶ διάμετρος τᾶς τομᾶς, ἁ β δ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον ὀρθὸν ἦμεν ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ κύκλος ἐστί, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἁ γ α. ἀπὸ δὲ τοῦ κύκλου τούτου κύλινδρος ἔστω, ἄξονα ἔχων τὸν β δ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ δή ἐστι ἤτοι κωνοειδές, ἢ σφαιροειδὲς μὴ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, τοῦ δὲ κυλίνδρου τούτου ἀεὶ δίχα τεμνομένου ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἐσσεῖται ποτὲ τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. ἔστω δὲ τὸ καταλελειμμένον ἀπ' αὐτοῦ κύλινδρος, ἔχων βάσιν τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὸν ε δ, ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διαιρήσθω δὲ ἁ β δ

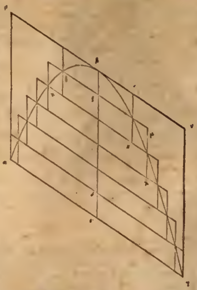


εἰς τὰς ἴσας τᾷ ε δ, κατὰ τὰ ρ ο, π ξ. καὶ ἀπὸ τῶν διαιρεσίων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν α γ, ἕως ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τῶν ἀχθεισῶν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω ὀρθὰ ποτὶ τὰν β δ. ἐσσοῦνται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, τὰ κέντρα ἔχοντες ἐπὶ τᾶς β δ. ἐφ' ἑκάστου δὲ τῶν κύκλων δύο κύλινδροι ἀναγεγράφθω, ἑκάτερος ἔχων ἄξονα ἴσον τῷ ε δ, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ κυλίνδρου ἐφ' ἅ ἐστι τὸ δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐφ' ἅ ἐστι τὸ β. ἐσσεῖται δή τι ἐν τῷ τμάματι σχῆμα στερεὸν ἐγγεγραμμένον ἐκ τῶν κυλίνδρων συγκείμενον τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων, ἐφ' ἅ ἐστι τὸ δ. καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον, καὶ συγκείμενον ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἀναγραφέντων τῶν ἐφ' ἃ τὸ β ἐστί. λοιπὸν δὲ δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος, ἕκαστος δὲ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι ἴσος ἐστὶ τῷ κυλίνδρῳ τῷ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἀναγραφομένῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὸ β, ὡς ὁ μὲν θη τῷ θι, ὁ δὲ κλ τῷ κμ. καὶ οἱ ἄλλοι ὡσαύτως. καὶ πάντες δὲ οἱ κύλινδροι πᾶσιν ἴσοι ἐντί. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ κυλίνδρῳ, τῷ βάσιν ἔχοντι τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν ε δ. οὗτος δ' ἐστὶν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

Τμάματος δοθέντος ὁποτερουοῦν τῶν κωνοειδέων ἀποτετμαμένου ἐπιπέδῳ μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἢ τῶν σφαιροειδέων ὁποτερουοῦν μὴ μείζονος ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ὁμοίως ἀποτετμαμένου, δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ τμᾶμα στερεὸν ἐγγράψαι ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων τῶν συγκειμένων. ἔστω τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δεδόσθω τμᾶμα οἷον εἴρηται. τμαθέντος δὲ τοῦ σχήματος ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ, ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ δοθὲν τμᾶμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα, ἁ γ α εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμᾶμα μὴ ἦμεν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ δ γ. ἁ φ υ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ β, καὶ ἀπὸ τᾶς φ υ ἀνεστακέτω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν α γ, ἐπιψαύσει δὲ τοῦ σχήματος κατὰ τὸ β. καὶ εἰ μὲν ἐστι τὸ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀπὸ τοῦ β ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα ἁ β δ. εἰ δὲ ἀμβλυγωνίου, ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδὲς εὐθεῖα ἀχθεῖσα ἐπὶ τὸ β ἐκβεβλήσθω, ἁ β δ. εἰ δὲ σφαιροειδέος, ἐπὶ τὸ β ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπὸ κέντρου ἀπολελάφθω ἁ β δ. δῆλον δὲ ὅτι τέμνει ἁ β δ δίχα τὰν α γ. ἐστὶν οὖν τὸ μὲν β κορυφὰ τοῦ τμάματος, ἁ δὲ β δ

εὐθεῖα

εὐθεῖα ἄξων. ἐστὶ δὴ ἁ τᾶς ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν α γ. ἁ γραμμὰ ἁ β δ ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς ἀνεστακοῦσα ὀρθὰ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διὰ τὰς ὑποθέσιας διαμέτρου ἐούσας τοῦ ἐπιπέδου. δυνατὸν οὖν ἐστι κύλινδρον εὑρεῖν ἄξονα ἔχοντα τὰν β δ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α γ. πεσεῖται δὲ ἁ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ οὖν ἤτοι κωνοειδέος ἢ σφαιροειδέος τμᾶμα, καὶ οὐ μεῖζόν ἐστιν ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ἐσσεῖται δή τις κυλίνδρου τόμος, βάσιας μὲν ἔχων τὰς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάς, τὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. τοῦ μὲν τόμου δίχα τεμνομένου ἐπιπέδοις παραλλάλοις τῷ ἐπὶ πέδῳ κατὰ τὰν α γ, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

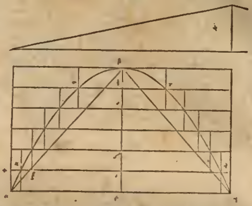


Ἔστω τόμος βάσιν μὲν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν ε δ, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. διῃρήσθω δὴ ἁ α β ἐς τὰς ἴσας τᾷ δ ε. καὶ ἀπὸ τῶν διαιρέσιων ἄχθων εὐθεῖαι παρὰ τὰν α γ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἀπὸ δὲ τᾶν ἀχθεισᾶν ἐπίπεδα ἀνεστακότων παράλληλα τῷ κατὰ τὰν α γ ἐπιπέδῳ, τέμνοντι δὴ ταῦτα τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ τμάματος, καὶ ποιοῦντι ὀξυγωνίων κώνων τομὰς ὁμοίας τᾷ περὶ τὰν α γ διάμετρον. ἐπεὶ παράλληλα ἐντὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐφ' ἑκάστας δὴ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ἀναγεγράφθωσαν κυλίνδρου τομοὶ δύο, ὁ μὲν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾶς ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τῷ δ, ὁ δὲ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῷ β, ἄξονα ἔχοντες ἴσον τῷ δ ε. ἐσσοῦνται δή τινα σχήματα στερεά, τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, τὸ δὲ περιγεγραμμένον ἐκ κυλίνδρου τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. λοιπὸν δέ ἐστι δεῖξαι, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος. δειχθήσεται δὲ ὁμοίως τῷ πρότερον, ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου ὑπερέχει τῷ τόμῳ, τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομάν, τὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν ε δ. οὗτος δέ ἐστιν ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος στερεοῦ μεγέθεος.

κγ Τούτων προγεγραμμένων ἀποδείκνυμες τὰ προβεβλημένα τῶν σχημάτων. πᾶν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα. ἔστω γὰρ τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμημένον ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τᾶς μὲν ἐπιφανείας τομὰ ἔστω ἁ α β γ ὀρθογωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα ἁ γ α εὐθεῖα. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ β δ. ἔστω δὲ καὶ κῶνος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. οὗ κορυφὰ τὸ β. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἐκκείσθω γὰρ κῶνος ὁ ψ, ἡμιόλιος ὢν τοῦ κώνου, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἔστω δὲ καὶ κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἐσσεῖται οὖν ὁ ψ κῶνος ἥμισυς ὅλου τοῦ κυλίνδρου. ἐπεί περ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ ψ κῶνος τοῦ αὐτοῦ κώνου. λέγω, ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον ἐστὶ τῷ ψ κώνῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐντι ἢ ἔλασσον. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ σχῆμα στερεὸν ἐς τὸ τμᾶμα, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων, ὕψος ἴσον ἐχόντων τῶν συγκειμένων, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ τηλικούτῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶ-

μα τοῦ

μα τοῦ Ψ κώνου. καὶ ἔστω τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν ε δ. ἐλάχιστος δὲ, ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ς τ, ἄξονα δὲ τὰν β θ. τῶν δὲ κυλίνδρων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα, μέγιστος μὲν ἔστω, ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον, τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ. ἄξονα δὲ τὰν δ ε. ἐλάχιστος δὲ ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν ς τ, ἄξονα δὲ τὰν θ ι. ἐκβεβλήσθω δὲ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἔσται δὴ ὅλος κύλινδρος

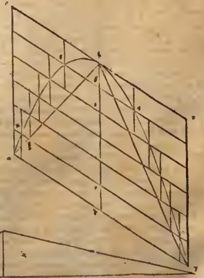


διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα περὶ τὸ τμᾶμα, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι μεῖζόν ἐστι τοῦ Ψ κώνου. ὁ δὴ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν κ ε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β ε, καὶ τῷ ὃν ἔχει ἁ δ α ποτὶ τὰν ε ξ. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ὁ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ε ζ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ π ε, τουτέστιν ἁ δ α ποτὶ τὰν ζ ι. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν, ἕξει τὸν τὸν λόγον ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τῶν α β, β δ εὐθειᾶν. καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ κύκλος ὁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξων δέ ἐστιν ἁ δ γ εὐθεῖα ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ἐν ταῖς βάσεσι ἐντὶ τῶν εἰρημένων κυλίνδρων, ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἀπολελαμμένας ἀπὸ τᾶς μεταξὺ τᾶν α β, β δ. αἱ δὲ εἰρημέναι εὐθεῖαι τῶν εἰρημένων χωρὶς τᾶς α δ μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιαι. ὥστε καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, οὗ ὁ ἄξων ὁ δ ι μείζονές ἐντι, ἢ διπλάσιοι τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. πολλῷ ἄρα καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος, οὗ ὁ ἄξων ἁ δ β, μείζων ἐντὶ ἢ διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. τοῦ δὲ Ψ κώνου ἦν διπλάσιος. ἔλασσον ἄρα τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ Ψ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ κωνοειδὲς τοῦ Ψ κώνου. ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἔλασσον. πάλιν γὰρ ἐγγεγράφθω τὸ σχῆμα, καὶ περιγεγράφθω, ὥστε ὑπερέχειν ἕκαστον ἔλασσον. ἢ πάλιν κ[illegible] ὑπερέχει ὁ Ψ κῶνος τοῦ κωνοειδέος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ τὸ ἐγγραφὲν τοῦ περιγραφέντος ἐλάσσονι λείπεται, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ Ψ κώνου, δῆλον ὡς ἔλασσόν ἐστι τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ Ψ κώνου. πάλιν δὲ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὴν δ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τᾷ ε δ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ε ζ, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ε ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν κ ε δυνάμει. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει ἁ β δ ποτὶ τὰν β ε, καὶ τὸ ὃν ἔχει ὁ δ α ποτὶ τὰν ε ξ, καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος

ι τῶν ἐν

τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ ἕκαστον τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἐχόντων τὸν αὐτὸν, ἕξει τοῦτον λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεα τᾶς βάσιος αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ ταῦ α β, β δ εὐθειᾶν. καὶ πάντες γοῦν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἄξων ἐστὶν ἁ β δ εὐθεῖα, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἕξουντι λόγον ὃν πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ποτὶ πάσας τὰς εὐθείας. αἱ δὲ εὐθεῖαι πᾶσαι αἱ ἐκ τῶν κέντρων τῶν κύκλων οἱ βάσεις ἐντὶ τῶν κυλίνδρων πρὸς τὰν εὐθεῖαν πᾶσαν τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶν σὺν τᾷ α δ ἐλάσσονες ἐντὶ, ἢ διπλάσιαι. δῆλον οὖν ὅτι καὶ οἱ κύλινδροι πάντες οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἐλάσσονές ἐντι ἢ διπλάσιοι τῶν κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλάσιον τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ. ἀλλὰ μείζων ἢ διπλάσιος. τοῦ γὰρ ψ κώνου διπλάσιόν ἐστι. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐδείχθη τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐκ ἔστι μεῖζον, ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

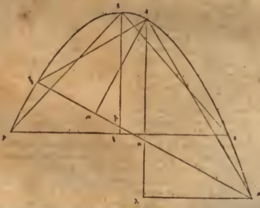
κα Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα ἀπὸ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος, ὁμοίως ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ὡς εἴρηται. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμηκὸς τὸ σχῆμα, τοῦ μὲν σχήματος ἔστω ἁ α β γ ὀρθογωνίου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμηκότος τὸ τμᾶμα ἁ α γ εὐθεῖα. ἄχθω δὲ τᾶς α γ ἁ φ υ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ β, καὶ ἁ β δ ἄχθω παρὰ τὸν ἄξονα. τέμνει δὴ αὐτὰ δίχα τὰν α γ. ἀπὸ δὲ τᾶς φ υ ἐπίπεδον ἀνεστακέτω παράλληλον κατὰ τῷ τὰν α δ. ἐπιψαύσει δὴ ἄρα τὸ κωνοειδὲς κατὰ τὸ β. καὶ ἐσσεῖται τοῦ τμάματος κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ β δ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν α γ, οὐ ποτ' ὀρθὰς ἐὸν τῷ ἄξονι τέτμηκε τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ α γ, ἐούσας δὴ ὀξυγωνίου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν γ α, καὶ γραμμᾶς τᾶς β δ, ἃ ἐστὶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, ἀνεστακυῖα ἐν ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ἀνεστακότι ἀπὸ διαμέτρου ποτὶ τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστὶν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, δυνατὸν ἐστὶ κύλινδρον εὑρεῖν τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ β δ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δυνατὸν δέ ἐστι καὶ κῶνον εὑρεῖν κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. ἐσσεῖται τόμος κυλίνδρου τις, βάσιν ἔχων τὰν τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰν τὰν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ. καὶ ἀπότμαμα κώνου βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τε τόμῳ καὶ τῷ τμάματι, ἄξονα δὲ τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ κωνοειδὲς τμᾶμα, ἡμιόλιόν ἐστι τούτου τοῦ κώνου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος ἡμιόλιος τοῦ ἀποτμάματος τούτου. ἐσσεῖται δὴ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὴν αὐτὴν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, διπλάσιος τοῦ ψ κώνου. οὗτος γὰρ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, τὸ εἰρημένον τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τόμου τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν μὲν



ἔχον

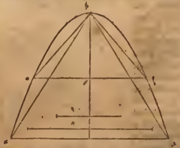
σιν τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἀναγκαῖον δὲ ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ἴσον ἦμεν τῷ τοῦ κώνου. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὲ πρότερον, εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δή τι εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενα. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ κώνου. καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν τομῶν ἐκβεβλήσθω ποτὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς αδ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κε· οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ' ἀλλάλους ταῖς βάσεσιν. αἱ δὲ βάσεις αὐτῶν ἐπεὶ ὅμοιαι ἐντὶ ὀξυγωνίου κώνου τομαί, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτᾶν δυνάμει. ἡμίσεαι δ' ἐντὶ τῶν ὁμολόγων διαμέτρων, αἱ αδ, κε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν κε δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε δυνάμει. ἐπεὶ ἁ μὲν βδ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν. αἱ δὲ αδ, κε παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν εξ. ἕξει οὖν ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ποτὶ τὸν πρῶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν εξ, καὶ τῶν ἄλλων τομῶν ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἴσον ἐχόντων τᾷ δε, πρὸς ἕκαστον τῶν τομῶν τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἄξονα ἐχόντων, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἁ ἡμίσεια τᾶς διαμέτρου τῶν βάσιων αὐτῶν ποτὶ τὰν ἀπολελαμμέναν ἀπ' αὐτᾶς μεταξὺ τῶν αβ, βδ. δειχθήσεται οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον τὸ μὲν ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ κώνου, ὁ δὲ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, μείζων ἐὼν ἢ διπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. ὥστε καὶ τοῦ κώνου μείζων ἐσσεῖται ἢ διπλάσιος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ διπλάσιος. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ κώνου. διὰ τῶν αὐτῶν δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον ἐστί. δῆλον οὖν ὅτι ἴσον. ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν.

Εἴκα ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμηθέωντι ἐπιπέδοις, τὸ μὲν ἕτερον ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ δὲ ἕτερον μὴ ὀρθῷ. ἐῶντι δὲ οἱ τῶν τμαμάτων ἄξονες ἴσοι, ἴσα ἐσσοῦνται τὰ τμάματα. ἀποτετμάσθω γὰρ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς εἴρηται. τμαθέντος δὲ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τοῦ μὲν κωνοειδέος ἔστω τομὰ ἁ βγ ὀρθογωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ βδ. τῶν δὲ ἐπιπέδων αἱ αζ, εγ εὐθεῖαι, τοῦ μὲν ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ἄξονα ἁ εγ, τοῦ δὲ μὴ ὀρθοῦ ἁ ζα. ἄξονες δὲ ἔστων τῶν τμαμάτων αἱ βθ, κλ ἴσαι ἀλλήλαις, κορυφαὶ δὲ τὰ β, λ. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ τμᾶμα κωνοειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, τῷ τμάματι τοῦ κωνοειδέος οὗ κορυφὰ τὸ λ. ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τᾶς αὐτᾶς ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, δύο τμάματα ἐντὶ ἀφῃρημένα, τό τε αλζ, καὶ τὸ εβγ, καὶ ἐντὶ αὐτῶν διάμετροι ἴσαι αἱ κλ, θβ, ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ αλκ τῷ εθβ. δέδεικται γὰρ ὅτι τὸ αλζ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ εβγ τριγώνῳ. ἄχθω δ' ἡ αχ κάθετος ἐπὶ τὰν κλ ἐκβληθεῖσαν. καὶ ἐπεὶ ἴσαι αἱ βθ, κλ, ἴσαι καὶ αἱ εθ, αχ. ἔστω δὲ ἐν τῷ τμάματι οὗ κορυφὰ τὸ β κῶ- κθ



νος ἐγγεγραμμένος ταὶ αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ὧν δὲ τῷ τμάματι ἁ κορυφὰ τὸ λ, ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ λ κάθετος ἐπὶ τὰν δζ ἁ λμ, ἐσσεῖται δὴ αὕτα ὕψος τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ. τὸ δὲ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ λ, καὶ ὁ κῶνος οὗ κορυφὰ τὸ β τὸν συγκείμενον λόγον ἔχοντι ποτ᾽ ἄλλαλα ἔκ τε τοῦ τῶν βασίων λόγου, καὶ ἐκ τοῦ τῶν ὑψέων. τὸν συγκείμενον οὖν ἔχοντι λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τᾶς περὶ διάμετρον τὰν αζ ποτὶ τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν εγ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λμ ποτὶ ταὶ βθ. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς ποτὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν διαμέτρων ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς εγ. ἔχει καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ, πρὸς τὸν κῶνον οὗ κορυφὰ τὸ β τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ κα ποτὶ ταὶ εθ. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λμ, ποτὶ τὰν βθ. ἁ μὲν γὰρ κα ἡμίσεά ἐστι τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος τᾶς τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου, οὗ κορυφὰ τὸ λ. ἁ δὲ εθ ἡμίσεα τᾶς διαμέτρου τᾶς βάσιος τοῦ κώνου. αἱ δὲ λμ, βθ ὕψεα ἐντὶ αὐτῶν. ἔχει δὲ ἁ λμ ποτὶ ταὶ βθ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ ποτὶ τὰν κλ, ἐπεὶ ἁ βθ ἴσα ἐστὶ τᾷ κλ. ἔχει δὲ καὶ ἁ λμ ποτὶ ταὶ κλ, ὃν ἁ χα ποτὶ ταὶ ακ ἔχει, καὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου ποτὶ τὸν κῶνον τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ ακ ποτὶ τὰν αχ ἴσα γάρ ἐστιν ἁ αχ τᾷ εθ. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λμ ποτὶ ταὶ βθ. ὁ δὲ ἐκ τῶν εἰρημένων λόγος ὁ τοῦ ακ πρὸς αχ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς λκ πρὸς λμ. τὸ ἄρα ἀπότμαμα πρὸς τὸν κῶνον λόγον ἔχει, ὃν ἁ λκ ποτὶ ταὶ λμ. καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ λμ ποτὶ ταὶ βθ. ἴσα δὲ ἁ βθ τᾷ κλ. δῆλον οὖν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου οὗ κορυφὰ τὸ λ, τῷ κώνῳ οὗ κορυφὰ τὸ β. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐντὶ ἑτέρον αὐτῶν. ἐπεὶ τὸ μὲν ἡμιόλιον ἐστι τοῦ κώνου, τὸ δὲ ἕτερον ἡμιόλιον τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου ἴσου ἐόντος.

κς Εἴκα τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέντι ἐπιπέδοις ὁπωσοῦν ἀγμένοις, τὰ τμάματα ποτ᾽ ἄλλαλα τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων αὐτῶν. ἀποτετμάσθω γὰρ τοῦ ὀρθογωνίου κωνοειδέος δύο τμάματα, ὡς ἔτυχεν. ἔστω δὲ τῷ μὲν τοῦ ἑτέρου τμάματος ἄξονι ἴσα ἁ κ, τῷ δὲ τοῦ ἑτέρου ἴσα ἁ λ. δεικτέον ὅτι τὰ τμάματα τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ᾽ ἄλλαλα τοῖς ἀπὸ τᾶν κ, λ τετραγώνοις. τμαθέντος δὴ τοῦ κωνοειδέος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ τμάματος, ἔστω τομὰ ἁ αβγ ὀρθογωνίου κώνου τομά. ἄξων δὲ ἁ βδ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ βδ τᾷ κ ἴσα. καὶ διὰ τοῦ δ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον ταὶ αγ, ἄξονα δὲ ταὶ βδ, ἴσον ἐστὶ τῷ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι ἴσον τᾷ κ. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ κ ἴσα ἐστὶ τᾷ λ, φανερὸν ὅτι καὶ τὰ τμάματα ἴσα ἐσσοῦνται ἀλλάλοις. ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν καὶ τῷ αὐτῷ καὶ τὰ τετράγωνα, τὰ ἀπὸ τῶν κ, λ ἴσα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ τμάματα τοῖς τετραγώνοις, τοῖς ἀπὸ τῶν ἀξόνων. εἰ δὲ μή ἴσα ἐστὶν ἁ λ τᾷ κ, ἔστω ἁ λ ἴσα τᾷ βθ. καὶ διὰ τοῦ θ ἐπίπεδον ἄχθω ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα. τὸ δὲ τμᾶμα τὸ βάσιν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν εζ, ἄξονα δὲ ταὶ βθ, ἴσον ἐστὶ τῷ τμάματι τῷ ἔχοντι ἄξονα ἴσον τᾷ λ. ἐγγεγράφθωσαν δύο κῶνοι βάσιν μὲν ἔχοντες τοὺς κύκλους τοὺς περὶ διαμέτρους τὰς αγ, εζ, κορυφὴν δὲ τὸ β σαμεῖον.

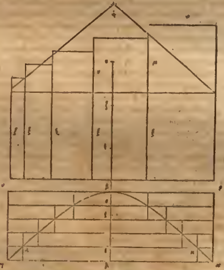


ὁ δὲ κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν βδ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα ταὶ βθ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν θε δυνάμει. καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βθ μάκει. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δα ποτὶ τὰν θε δυνάμει, τοῦτον ἔχει ἁ βδ ποτὶ τὰν βθ μάκει. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἔχων ἄξονα τὰν βδ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν βθ, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ δβ ποτὶ τὰν θβ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἁ δβ ποτὶ τὰν βθ. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς δβ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θβ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ὁ κῶνος ἄξονα ἔχων τὰν βδ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἄξονα ἔχοντα τὰν θβ, τοῦτον ἔχει

τὸν

τὸν λόγον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον τὰν δ β, ποτὶ τὸ τμῆμα τὸ ἄξονα ἔχον τὰν θ β. ἑκάτερον γὰρ ἡμιόλιόν ἐστι. καὶ ἐστὶ τῷ μὲν τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν β δ, ἴσον τμῆμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ. τῷ δὲ τμάματι τῷ ἄξονα ἔχοντι τὰν θ β, ἴσον τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσαν τᾷ λ. καὶ τᾷ μὲν β δ ἴσα ἁ κ, τᾷ δὲ θ β ἴσα ἁ λ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ κ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ποτὶ τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος, τὸ ἄξονα ἔχον ἴσον τᾷ λ, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς κ ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς λ.

Πᾶν τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ καὶ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα ἴσα τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τῷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. ἔστω τι τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος, ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. καὶ τμαθέντος αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, ἁ τομὰ ἔστω αὐτοῦ μὲν τοῦ κωνοειδέος ἁ α β γ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμῆμα εὐθεῖα ἁ α γ. ἄξων δὲ ἔστω τοῦ τμάματος ἁ β δ. ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἔστω ἁ β θ. καὶ τᾷ β θ ἴσα ἁ ζ θ, καὶ ἁ ζ κ. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, λόγον ἔχει ὃν ἁ κ δ ποτὶ τὰν ζ δ. ἔστω δὴ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ἔστωσαν αἱ φ α, γ υ. ἔστω δὴ καὶ κῶνός τις ἐν ᾧ τὸ ψ. καὶ ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὰν β δ, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ κ δ ποτὶ τὰν δ ζ. φαμὶ δὴ τὸ τμῆμα τοῦ κωνοειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον ἢ ἔλασσόν ἐστιν. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμῆμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμῆμα τοῦ ψ κώνου. διήχθω δὴ τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων ποτὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ. ἄξονα δὲ τὰν β δ. ἐσσεῖται δὴ ὅλος ὁ κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ τὸ τμῆμα τοῦ ψ κώνου,



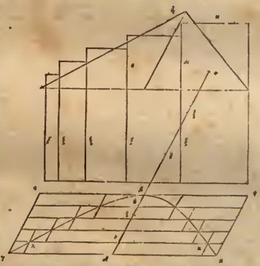
καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς β δ, ἁ β ρ. ἐσσεῖται οὖν ἁ κ δ τριπλασία τᾶς θ ρ. ἐπεὶ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν β δ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ κ δ ποτὶ τὰν θ ρ. ἔχει δὲ καὶ ὁ εἰρημένος κῶνος ποτὶ τὸν ψ κῶνον ὃν ἁ ζ δ ποτὶ τὰν κ δ, ἐξ ἀμείβαν, ὁμοίως τῶν λόγων τεταγμένων τοῦ αὐτοῦ λόγου ὁ κύλινδρος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὃν ἁ ζ δ

ποτὶ

ποτὶ τὰν β ρ. ἔστω δὲ αἱ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ' αὐτᾶς ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς ἐν τᾷ β δ εὐθείᾳ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζ β. καὶ παρ' ἑκάσταν αὐτᾶν παραπεπτωκέτω χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὸ μὲν μέγιστον ἔστω ἴσον τῷ ὑπὸ ζ δ β. τὸ δὲ ἐλάχιστον ἴσον τῷ ὑπὸ ζ ο β. αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχόντων. καὶ γὰρ αἱ ἴσαι αὐταῖς αἱ ἐπὶ τᾶς β δ εὐθείας, τῷ ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντι. καὶ ἔστω ἁ μὲν τοῦ μεγίστου ὑπερβλήματος πλευρὰ, ἐφ' ἇς τὸ μ, ἴσα τᾷ β δ. ἁ δὲ τοῦ ἐλαχίστου ἴσα τᾷ β ο. ἔστω δὲ καὶ ἄλλα χωρία ἐν οἷς τὸ ω, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, τῷ ὑπὸ τᾶν ζ δ β. ὁ δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν μὲν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, ἄξονα δὲ τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν κ ε δυνάμει. οὗτος δ' ἐστὶν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ δ β ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ ε β. ἐν πάσᾳ γὰρ τᾷ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾷ τοῦτο συμβαίνει. ἁ γὰρ διπλασία τᾶς ποτιούσας, τουτέστι τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου, πλαγία ἐστὶ τοῦ εἴδεος πλευρά. καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ὑπὸ τᾶν ζ δ, β δ περιεχομένῳ ἴσον τὸ ξ μ χωρίον, τῷ δὲ ὑπὸ τᾶν ζ ε, β ε ἴσον ἐστὶ τὸ ξ ν. ἁ γὰρ ξ ἴσα ἐστὶ τᾷ ζ β, ἁ δὲ ν τᾷ β ε, ἁ δὲ μ τᾷ β δ. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ τὰν δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, ἄξονα δὲ τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξ μ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἄξονα τοῦτον ἔχων τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν περὶ τὰν ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλον τῷ τετραγώνῳ. ἐστὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι, οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὧν ἕκαστος ἄξονα ἔχει ἴσον τᾷ δ ε, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ ω, ἴσα τούτοις τῷ πλήθει, κατὰ δύο μεγέθεα τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἐπεί οἵ τε κύλινδροι ἴσοι ἐντὶ ἀλλάλοις, καὶ τὰ ω χωρία ἴσα ἀλλάλοις. λέγονται δὲ τῶν δὴ κυλίνδρων τινὲς ποτὶ ἄλλους κυλίνδρους ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. καὶ τῶν χωρίων ἐν οἷς τὰ ω ποτ' ἄλλα χωρία τὰ παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, τὰ δὲ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἕξοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου. δέδεικται δὲ, ὅτι πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζω λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ ν ξ ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα ἔχει λόγον, ἢ ὃν ἁ ζ δ ποτὶ τὰν β ρ. ὃν ὅλος κύλινδρος ἔχων ἐδείχθη ποτὶ τὸν ψ κῶνον. μείζονα οὖν ἕξει λόγον ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ὥστε μείζων ἐστὶν ὁ ψ κῶνος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον τοῦ ψ κώνου, οὐκ ἄρα μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. οὐδὲ μὰν ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν οὖν ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τμᾶμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τμάματος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὅτι κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρᾶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ξ ν. ἴσον γὰρ ἑκάτερον. καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ὃν τὸ ω χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν ξ παραβλημάτων σὺν τῷ ὑπερβλήματι, διὰ τὸ ἕκαστον τῶν περιγεγραμμένων χωρὶς τοῦ μεγίστου, ἴσον εἶν ἑκάστῳ τῶν ἐγγεγραμμένων σὺν τῷ μεγίστῳ. ἕξει οὖν καὶ ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ τὰ παραβλήματα σὺν τοῖς ὑπερβλήμασι. δέδεικται δὲ πάλιν πάντα τὰ ω χωρία ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα ἐλάσσω λόγον ἔχοντα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ξ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ ὅλος ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ ζ δ ποτὶ τὰν β ρ. ἀλλ' ὡς ἁ ζ δ ποτὶ τὰν β ρ, ὁ ὅλος κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον.

κῶνον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸ ψ. ὥστε μεῖζον δεῖ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ψ κώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον οὔτε ἔλασσόν ἐστι, δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

Καὶ τοίνυν ἄκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ ἀποτμαθῇ τὸ τμᾶμα τοῦ ἀμβλυγωνίου κε
κωνοειδέος, ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἄξονι τοῦ τμάματος, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι, ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἄξονι καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶς ποτεούσας τῷ ἄξονι. ἔστω γὰρ τμᾶμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος ἀποτετμαμένον ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ ἐπιπέδῳ τοῦ σχήματος ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἀποτετμακὸς τὸ τμᾶμα, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ βγ ἀμβλυγωνίου κώνου τομά, τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτετμακότος τὸ τμᾶμα, ἁ γα εὐθεῖα. κορυφὰ δὲ ἔστω τοῦ κώνου τοῦ περιέχοντος τὸ κωνοειδές, τὸ θ σαμεῖον. καὶ ἄχθω διὰ τοῦ β παρὰ τὰν αγ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, ἁ φυ. ἐπιψαυέτω δὲ κατὰ τὸ β. καὶ ἀπὸ τοῦ θ ἐπὶ τὸ β ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω, τέμνει δὲ τὰ αὐτὰ δίχα τὰν αγ. καὶ ἐσσεῖται κορυφὰ μὲν τοῦ τμάματος τὸ β σαμεῖον, ἄξων δὲ ἁ βδ. ἁ δὲ ποτεοῦσα τῷ ἄξονι ἁ βθ. τᾷ δὲ βθ ἴσα ἔστω ἁ τε θζ, καὶ ἁ ζη. ἀπὸ δὲ τᾶς φυ ἐπίπεδον ἀνασταθήτω τὸ παράλληλον τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαύσει δὴ τοῦ κωνοειδέος κατὰ τὸ β. καὶ ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν αγ οὐκ ἐὸν ὀρθὸν ποτὶ τὸν ἄξονα τέτμηκε τὸ κωνοειδές, ἁ τομὰ ἐσσεῖται ὀξυγωνίου κώνου τομά. διάμετρος δὲ αὐτᾶς ἁ μείζων ἁ γα. ἐούσας δὲ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς περὶ διάμετρον τὰν αγ, καὶ τᾶς βδ γραμμᾶς ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀνεστακούσας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ὃ δὴ ἀπὸ τᾶς διαμέτρου, ὀρθὸν ποτὶ τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά. δυνατὸν δὴ κύλινδρον εὑρεῖν, τὸν ἄξονα ἔχοντα ἐπ' εὐθείας τᾷ βδ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος οὖν ἐσσεῖται τις κυλίνδρου τόμος, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἁ δὲ ἑτέρα βάσις αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ ἐπίπεδον τὸ κατὰ τὰν φυ. πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατὸν δή, κορυφὰν



ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος οὖν, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, δεικτέον ὅτι τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ κδ ποτὶ τὰν δζ. ὃν γοῦν ἔχει λόγον ποτὶ τὰν δζ, τοῦτον ἔχει ὁ ψ κῶνος ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου. εἰ οὖν μὴ δεῖ ἴσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τῷ κώνῳ τῷ ψ. εἰ γὰρ μὴ δυνατόν, δεῖ μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ τμάματος, ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ ψ κώνου, δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα

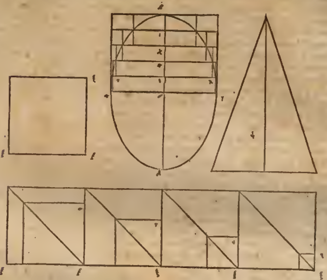
τοῦ ψ

τοῦ ψ κώνου. διήχθω δὲ τὰ ἐπίπεδα τῶν τόμων τῶν ἐγγεγραμμένων ἐν τῷ σχήματι πάντων ἐσσεῖται ποτὶ ἐπιφάνειαν τοῦ τόμου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. καὶ ἔστι β ε τρίτον μέρος ἴσω τᾶς β δ. καὶ τ᾽ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατεσκευάσθω. πάλιν δὲ ὁ πρῶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε, ποτὶ τὸν πρᾶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. οἱ γὰρ τόμοι οἱ ἴσον ὕψος ἔχοντες, τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτ᾽ ἀλλήλους, ὅνπερ αἱ βάσεις αὐτῶν. ἐντὶ δὲ ὅμοιαι ἐν τῷ ὀξυγωνίου κώνου τομαί. τὸν αὐτὸν οὖν λόγον ἔχοντι ποτ᾽ ἀλλάλους, ὃν αἱ ὁμόλογοι διάμετροι αὐτᾶν δυνάμει. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς α δ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε, τοῦτον ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε β. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν ζ δ ἀγμένα διὰ τοῦ θ, καθ᾽ ἃς ἔγγιστα συμπίπτοντι. αἱ δὲ α δ, κ ε παρὰ τὰν τεταγμένως τὸ β ἐπιψαύουσαν. οὖν δὲ τὸ μὴ ὑπὸ τᾶν ζ δ β περιεχόμενον ἴσον τῷ α χωρίῳ, τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ζ ε β τῷ ξ μ. ἔχει οὖν ὁ πρᾶτος τόμος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δ ε ποτὶ τὸν πρᾶτον τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δ ε, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ ξ μ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ τόμων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δ ε ποτὶ τὸν τόμον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ᾽ αὐτὸν ἐόντα, καὶ ἄξονα ἔχοντα ἴσαν τᾷ δ ε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ α χωρίον ποτὶ τὸ ὁμόλογον τῶν παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότων ὑπερβαλλόντων εἴδει τετραγώνῳ. Πάλιν οὖν ἐντί τινα μεγέθεα οἱ ἐν τῷ ὅλῳ τόμῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα τὰ χωρία ἐν οἷς τὸ α ἴσα τῷ πλήθει τοῖς τόμοις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι αὐτοῖς. λέγονται δὲ οἱ τόμοι, ποτ᾽ ἄλλως τόμως τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος τόμος οὐδὲ ποθὲν λέγεται. τὰ δὲ α χωρία ποτ᾽ ἄλλα χωρία παρὰ τὰν ξ παραπεπτωκότα τὰ ὑπερβάλλοντα εἴδεσι τετραγώνοις, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον οὐδὲ ποθὲν λέγεται. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τόμοι ποτὶ πάντας τὸν αὐτὸν ἕξοντι λόγον, ὃν πάντα τὰ α χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου. πάντα δὲ τὰ α χωρία ποτὶ πάντα τὰ παραβλήματα, χωρὶς τοῦ μεγίστου μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ ὃν ἁ γ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὅλος ὁ τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξ ν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ν. ὥστε καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ρ. μείζονα οὖν ἔχει λόγον ὁ ὅλος τόμος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ οὖν ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. εἰ δὲ ἔλασσον ἐστὶ τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου, ἐγγραφέντος εἰς τὸ τμᾶμα σχήματος στερεοῦ, καὶ ἄλλου περιγραφέντος ἐκ κυλίνδρων τομῶν ἴσον ὕψος ἐχόντων συγκειμένου, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος. πάλιν ὁμοίως δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τοῦ κυλίνδρου τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἐστὶν οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ τοῦ κωνοειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.

κδ Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος, ἐπιπέδῳ τμαθέντος διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος διπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω σφαιροειδὲς σχῆμα ἐπιπέδῳ τετμαμένον διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ, τοῦ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς, καὶ ἄξων τοῦ σφαιροειδέος ἁ β δ, κέντρον δὲ τὸ θ. διοίσει δὲ οὐδὲν εἴτε ἁ μείζων ἐστὶ διάμετρος ἁ β δ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, εἴτε ἐλάσσων. τοῦ δὲ τετμακότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα τομὰ ἔστω ἁ γ α εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ διὰ τοῦ θ. καὶ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ποτὶ τὰν β δ. ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου τετμᾶσθαι, καὶ ὀρθὸν εἶμεν ποτὶ τὸν ἄξονα, δεικτέον ὅτι τὸ ἅμισυ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ β σαμεῖον, διπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω γὰρ κῶνος τις ἐν ᾧ τὸ ψ διπλάσιον τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν τὰν τοῦ τμάματι. καὶ ἄξονα τὸν αὐτὰν τὰν θ β. φαμὶ δὲ τὸ ἅμισυ τοῦ σφαιροειδέος ἴσον εἶμεν τῷ ψ κώνῳ. εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ ἅμισυ τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα τὸ ἅμισυ τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω, ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ

ὑπερ-

ὑπερέχει τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ τοῦ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ τοῦ κώνου. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἐν τῷ τμάματι τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος μεῖζόν ἐστι τοῦ τοῦ κώνου. ἔστω δὴ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἄξονα δὲ



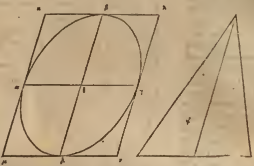
τὰν β θ. ἐπεὶ οὖν ὅ τε κύλινδρος τριπλάσιός ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὁ δὲ τοῦ κῶνος διπλάσιός ἐστι τοῦ αὐτοῦ κώνου, δῆλον ὡς ὁ κύλινδρος ἡμιόλιός ἐστι τοῦ τοῦ κώνου. ἐκβεβλήσθω δὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν κυλίνδρων πάντων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα. ἐσσεῖται ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διαιρούμενος εἰς κυλίνδρους, τῷ μὲν πλήθει ἴσους τοῖς κυλίνδροις τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τῷ δὲ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν. ἔστω δὴ οὖν γραμμαὶ κείμεναι, ἐφ᾽ αἷς τὰ ξ, τῷ πλήθει ἴσαι τοῖς τμάμασι τᾶς β θ εὐθείας, τῷ δὲ μεγέθει ἴσα ἑκάστα τᾷ β θ, καὶ ἀπὸ ἑκάστας τετράγωνον ἀναγεγράφθω. ἀφαιρήσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ ἐσχάτου τετραγώνου γνώμων, πλάτος ἔχων ἴσαν τᾷ β ι. ἐσσεῖται δὲ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν β ι, ι δ. ἀπὸ δὲ τοῦ παρ᾽ αὐτῷ τετραγώνου γνώμων ἀφαιρείσθω, πλάτος ἔχων διπλάσιον τᾶς β ι. ἐσσεῖται δὴ οὗτος ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν β χ, χ δ. καὶ ἀεὶ ἀπὸ τοῦ ἐχομένου τετραγώνου γνώμων ἀφαιρείσθω πλάτος μὲν ἴσον τμάματι, μεῖζον τοῦ πλάτεος τοῦ πρὸ τοῦ αὐτοῦ ἀφαιρεθέντος γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ ἕκαστος αὐτῶν ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τᾶς β δ τμαμάτων, ὧν τὸ ἕτερον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῷ πλάτει τοῦ γνώμονος. ἐσσεῖται δὴ καὶ ἀπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου τὸ λοιπὸν τετράγωνον, τὰν πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ θ ε. ὁ δὲ κύλινδρος ὁ πρῶτος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν πρῶτον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α θ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς κ ε. ὥστε καὶ ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ περιεχόμενον. ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ἀφαιρεθέντα. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων ἕκαστος, ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν

τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, καὶ ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτόν, ἕκαστος ἔχει τὸν λόγον ὃν τὸ τετράγωνον, ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπὸ τοῦ ἑπομένου αὐτῷ τετραγώνου ἀφαιρημένον. ἐντὶ δή τινα μεγέθεα οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ξ ξ ἴσα τῷ πλήθει τοῖς κυλίνδροις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα. λέγονται δὲ οἱ κύλινδροι ποτ' ἄλλα μεγέθεα τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. καὶ τὰ τετράγωνα ποτ' ἄλλα μεγέθεα τοὺς ἀπὸ τῶν τετραγώνων ἀφαιρημένους ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον τετράγωνον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους κυλίνδρους, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρημένους ἀπ' αὐτῶν. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας τοὺς ἀφαιρημένους ἀπ' αὐτῶν. τὰ δὲ τετράγωνα πάντων τῶν γνωμόνων τῶν ἀφαιρημένων ἀπ' αὐτῶν μείζονα ἐντὶ ἢ ἡμιόλια. ἐντὶ γάρ τινες γραμμαὶ κείμεναι αἱ ξ ε, ξ σ, ξ τ, ξ υ, ξ φ, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἁ ἐλαχίστα ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαί, ἐφ' ἂν τὰ δύο ξ ξ, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. τὰ νῦν τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν ἃ ἐστὶν ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, πάντων μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ἴσον ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐντὶ ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μεῖζον ἢ τριπλάσιον. τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς περὶ τᾶν ἑλίκων ἐκδεδομένοις δέδεικται. ἐπεὶ δὲ πάντα τὰ τετράγωνα ἐλάσσονα ἐντί, ἢ τριπλάσια τῶν ἑτέρων τετραγώνων, ἃ ἐντὶ ἀφαιρημένα ἀπ' αὐτῶν, δῆλον ὅτι τῶν λοιπῶν μείζονα ἐντὶ ἢ ἡμιόλια. τῶν οὖν γνωμόνων μείζονα ἢ ἡμιόλια, ὥστε καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, μείζων ἐστὶν ἢ ἡμιόλιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ κώνου ἡμιόλιός ἐστι. τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐδείχθη τοῦ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ κώνου. οὐδὲ τοίνυν ἔλασσον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγραφὲν σχῆμα τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν θ ε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν τὸ πρῶτον τετράγωνον ποτ' αὐτό. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν ε π, ποτὶ τὸν δεύτερον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν ε π, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ β τετράγωνον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον, καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος, τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ θ ε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι κατ' αὐτὸν ἐόντα, τὸν αὐτὸν ἕκαστος ἔχει λόγον, ὁμοίως τεταγμένου αὐτοῦ τετραγώνου ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ τετράγωνα ποτὶ τὸ ἴσον τῷ πρώτῳ τετραγώνῳ. καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τετραγώνων ἀφαιρημένοις. καὶ τὰ τετράγωνα πάντα ἐλάσσονα ἐντί, ἢ ἡμιόλια τοῦ ἴσου τῷ τε πρώτῳ τετραγώνῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, διότι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονά ἐντι ἢ τριπλάσια. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιός ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. τοῦ γὰρ κώνου ἡμιόλιός ἐστι. τὸ δὲ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλαττον ἐδείχθη τοῦ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος τοῦ κώνου. ἐπεὶ οὔτε μεῖζον ἐστίν, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστί.

κ Καὶ τοίνυν εἴκα τὸ σφαιροειδὲς μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου τμαθῇ, ὁμοίως τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος, διπλάσιον ἐσσεῖται τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. τετμάσθω γὰρ σχῆμα σφαιροειδές. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά, κέντρον δὲ αὐτᾶς τὸ θ, τοῦ δὲ τετμακότος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἔστω ἁ α γ εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ θ ἀγομένα, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὑπόκειται διὰ τοῦ κέντρου ἄχθαι. ἐσσεῖται οὖν τις ὀξυγωνίου κώνου τομὰ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ

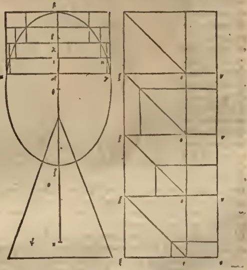
ἀποτέμνον

ἀποτέμνον ἐπίπεδον ἐστὶ ποτ' ὀρθὰς ἐὸν τῷ ἄξονι ἀγμένον. ἄχθω δή τινες αἱ κλ, μν παρὰ τὰν αγ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, δ. ἀπὸ δὲ τᾶν κλ, μν ἐπίπεδα ἀνεστακέτω παράλληλα τῷ κατὰ τὰν αγ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος, κατὰ τὰ β, δ ἐπιζευχθεῖσαι. πεσεῖται δὲ διὰ τοῦ θ, καὶ ἐσσοῦνται τῶν τμαμάτων κορυφαὶ μὲν τὰ β, δ σαμεῖα, ἄξονες δὲ αἱ βθ, θδ. δυνατὸν δέ ἐστιν εὑρεῖν κύλινδρον, ἄξονα ἔχοντα τὰν βθ, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος δὲ ἐσσεῖταί τις κυλίνδρου τόμος, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἡμίσει τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. πάλιν δὲ καὶ κῶνον εὑρεῖν δυνατόν ἐστι, κορυφὰν ἔχοντα τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομά, ἁ περὶ διάμετρον τὰν αγ. εὑρεθέντος δὲ ἐσσεῖται τὸ ἀπότμαμα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. λέγω δή, ὅτι τὸ σφαιροειδέος ἡμίσεον διπλάσιόν ἐστι τοῦ κώνου τούτου. ἔστω δὴ ὁ ψ κῶνος διπλάσιος τοῦ ἀποτμάματος τοῦ κώνου. εἰ οὖν μή ἐστιν ἴσον τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δή τι εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος, μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τόμος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου καὶ ὁ τόμος ἐών, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐν ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος μείζων ἢ ἡμιόλιος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἔσται οὖν τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐγγεγράφθω κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος. πάλιν οὖν ὁμοίως τοῖς πρότερον δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦ μὲν ψ κώνου ἡμιόλιος ἐών, τοῦ δὲ περιγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσων ἢ ἡμιόλιος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδὲ ἔλασσον τὸ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζόν ἐστιν, οὐδὲ ἔλασσον, ἴσον ἐστί. φανερὸν οὖν ἐστιν ὃ ἔδει δεῖξαι.



Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, τὸ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τὰ ἡμίσεα τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ ὁ ἄξων τοῦ μείζονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. ἔστω γάρ τι τμᾶμα σφαιροειδέος σχήματος, ἀποτετμημένον ἐπιπέδῳ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου. τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ αβγ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ τᾶς τομᾶς, καὶ ἄξων σφαιροειδέος ἔστω ἁ βζ, κέντρον δὲ τὸ θ. τοῦ δὲ ἐπιπέδου τοῦ ἀποτέμνοντος τὸ τμᾶμα, τομὰ ἔστω ἁ αγ εὐθεῖα. ποιέει δὲ αὐτὰ ὀρθὰς γωνίας ποτὶ τὰν βζ, ἐπεὶ τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν ἦν ποτὶ τὸν ἄξονα ὑποκείμενον. ἔστω δὲ τὸ τμᾶμα τὸ ἀποτετμημένον, οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ἔλασσον ἢ ἅμισυ τοῦ σφαιροειδέος σχήματος, καὶ τᾷ βθ ἴσα ἔστω ἁ ζκ. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα οὗ κορυφὰ τὸ β σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ δκ ποτὶ τὰν δζ. ἔστω δὲ κύλινδρος τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ ἐλάσσονι τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. ἔστω δὲ καὶ κῶνος, ἐν ᾧ τὸ ψ, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτάν, τοῦτον ἔχων τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ λα

δη ποτὶ τὰν δζ. φαμὶ δὴ τὸ ψ κῶνον ἴσον ἦμεν τῷ τμάματι τῷ κορυφὰν ἔχοντι τὸ β σαμεῖον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσος, ἔστω πρᾶτον εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεόν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστι τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, ἔλασσον ὑπερέχει τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἢ τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου. δῆλον ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. ἔστω δὴ τρίτον μέρος τᾶς βδ ἁ βρ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν βη τριπλασία ἐστὶ τᾶς βθ, καὶ ἁ βδ τᾶς βρ, τριπλασία ἐσσεῖται καὶ ἁ δη τᾶς θρ. ἔχει δὴ ὁ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὰν βδ, πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτάν,



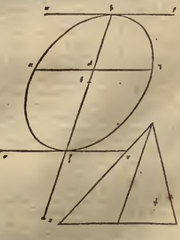
καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δη ποτὶ τὰν θρ. ὁ δὲ κῶνος ὁ εἰρημένος ποτὶ τὸν ψ κῶνον, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ δζ ποτὶ τὰν δη. ἐξ ἴσου οὖν ἀνομοίως τῶν λόγων τεταγμένων ὁ κύλινδρος, ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ποτὶ τὸν ψ κῶνον τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ. ἔστω δὴ γραμμαὶ κείμεναι ἐφ᾽ αἷς τὰ ξο, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι τοῖς τμαμάτεσσι τοῖς ἐν τᾷ βδ, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ ζδ. ἔστω δὲ καὶ τᾶν ξο ἑκάστα ἴσα τᾷ βδ. τὰν οὖν νο ἑκάστα διπλασία ἐσσεῖται τᾶς θδ. παραπεπτωκέτω δὴ παρ᾽ ἑκάσταν αὐτᾶν χωρίον τι, πλάτος ἔχον ἴσον τᾷ βδ. ὥστε εἰ μὲν ἕκαστον τῶν ἐχόντων τὰς διαμέτρους τετράγωνον, ἀφαιρείσθω δὴ ἀπὸ μὲν τοῦ πρώτου γνώμων πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ βε. ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου, πλάτος ἔχων ἴσον τᾷ βχ. καὶ ἀφ᾽ ἑκάστου τὸν αὐτὸν τρόπον ἀεὶ ἀπὸ τοῦ ἑπομένου χωρίου γνώμων ἀφαιρείσθω, πλάτος ἔχων ἐν τμάματι ἔλασσον τοῦ πλάτεος τοῦ ἀπὸ αὐτοῦ γνώμονος ἀφαιρημένου, ἐσσεῖται δὴ ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ πρώτου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν βε, εζ, καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρὰ τὰν νο παραπεπτωκὸς ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, τὰν τοῦ ὑπερβλήματος πλευρὰν ἔχον ἴσαν τᾷ δε. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου χωρίου γνώμων ἀφαιρημένος, ἴσος τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζχ, χβ. καὶ τὸ λοιπὸν χωρίον παρὰ τὰν νο παραπεπτωκός, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ. καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως τούτοις. ἐξοῦντι δὲ ὧδε. τὰ ἐπίπεδα πάντων τῶν κυλίνδρων, ἐξ ὧν σύγκειται τό, τε ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, ἐσσεῖται δὴ ὁ ὅλος κύλινδρος διῃρημένος εἰς κυλίνδρους τῷ μὲν πλήθει ἴσους, τοῖς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τῷ μεγέθει ἴσους τῷ μεγίστῳ αὐτῶν, ὁ δὲ πρᾶτος ὁ κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρᾶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι τὸν ἔχοντα ἄξονα τὰν δε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς δγ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κε. οὗτος δέ ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν βδ, δζ περιεχόμενον, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν βε, εζ. ἔχει οὖν ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸν κύλινδρον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ πρᾶτον χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κυλίνδρων τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ἕκαστος ἄξονα ἔχων τὰν ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κατ᾽ αὐτὸν κύλινδρον

κυλίνδρων τὸν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἄξονα ἔχοντα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμοίως τεταγμένον αὐτῷ χωρίον ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον. ἐντὶ οὖν μεγέθεα τινὰ οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, καὶ ἄλλα μεγέθεα χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος ἔχοντα τὰν ἴσαν τᾷ βδ, τῷ δὲ πλήθει ἴσα τοῖς κυλίνδροις, καὶ κατὰ δύο τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον. λέγονται δὲ οἵ τε κύλινδροι ποτ' ἄλλους κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. ὁ δὲ ἔσχατος οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. καὶ τὰ χωρία ποτ' ἄλλα χωρία τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρημένα, τὰ ὁμόλογα ἐν τοῖς αὐτοῖς λόγοις. τὸ δὲ ἔσχατον χωρίον οὐδὲ ποθ' ἓν λέγεται. δῆλον οὖν ὅτι καὶ πάντες οἱ κύλινδροι ποτὶ πάντας τοὺς ἑτέρους τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, τὸν αὐτὸν ἑξεῖ λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας. καὶ ἐπεὶ ἐντί τινες γραμμαὶ ἴσαι κείμεναι ἐφ' αὐτᾷ νο, καὶ παρ' ἑκάσταν παραπέπτωκέ τι χωρίον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, αἱ δὲ πλευραὶ τῶν ὑπερβλημάτων ἴσῳ ἀλλάλων ὑπερέχοντι, καὶ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα ἐστὶ τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλα ἐντὶ χωρία παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, πλάτος δὲ ἔχοντα ἴσας τᾷ βδ, τῷ μὲν πλήθει ἴσα τούτοις, τῷ δὲ μεγέθει ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, δῆλον ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ὧν ἐστιν ἕκαστον ἴσον τῷ μεγίστῳ, ποτὶ πάντα τὰ ἕτερα χωρία ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέρα τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξο. φανερὸν οὖν ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ πάντας τοὺς γνώμονας μείζονα λόγον ἑξοῦντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν, συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξο. ὁ ἄρα κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις, τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ δυοῖς τριταμορίοις τᾶς ξο. ἐστὶ δὲ τᾷ μὲν ξν ἴσα ἁ δζ, τᾷ δὲ ἡμισείᾳ τᾶς νο, ἁ δε, τᾷ δὲ τρίτα δύο μέρεα τᾶς ξο, ἁ δρ. ὅλος ἄρα ὁ κύλινδρος ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ἐν τῷ τμάματι, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δζ ποτὶ τὰν θρ, τοῦτον ἐδείχθη ἔχων ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον. μείζονα οὖν ἕξει λόγον ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἐὸν τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου. ἀλλ' ἔστω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. πάλιν δὴ ἐγγεγράφθω τι εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ μεῖζόν ἐστιν ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα τοῦ τμάματος, καὶ ἐλάσσονι ὑπερέχει τὸ περιγραφὲν, ἢ ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ψ κώνου. πάλιν δὴ ὁ πρῶτος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ὁ ἔχων ἄξονα τὰν δε, ποτὶ τὸν πρῶτον κύλινδρον τὸν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν ἔχοντα ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει λόγον, ὃν τὸ ἔσχατον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσον τᾷ βε, ποτ' αὐτό. ἑκάτερα γὰρ ἴσα ἐστίν. ὁ δὲ δεύτερος κύλινδρος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἔχων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κύλινδρον τὸν κατ' αὐτὸν ἐόντα τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ πρῶτον χωρίον τῶν παρὰ τὰν ξν πεπτωκότων, πλάτος ἐχόντων ἴσαν τᾷ βδ, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀφαιρημένον ἀπ' αὐτοῦ. καὶ τῶν ἄλλων δὲ κυλίνδρων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ ἄξονα ἐχόντων ἴσαν τᾷ δε, ποτὶ τὸν κατ' αὐτὸν κύλινδρον τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὁμόλογον χωρίον αὐτῷ τῶν παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότων, ποτὶ τὸν γνώμονα τὸν ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρημένον παρὰ τοῦ λεγομένου τοῦ ἐχομένου. καὶ πάντες οὖν οἱ κύλινδροι οἱ ἐν τῷ ὅλῳ κυλίνδρῳ, ποτὶ πάντας τοὺς κυλίνδρους τοὺς ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν πάντα τὰ χωρία τὰ παρὰ τὰν ξν παραπεπτωκότα, ποτὶ τὸ ἴσον τῷ τε ἐσχάτῳ κειμένῳ χωρίῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀφαιρημένοις ἀπὸ τῶν ἄλλων, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι τὰ χωρία πάντα τὰ παρὰ τὰν νο παραπεπτωκότα ὑπερβάλλοντα εἴδει τετραγώνῳ, χωρὶς τοῦ μεγίστου, μείζονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισείᾳ τᾶς νο, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τᾶς ξο. δῆλον ὅτι τὰ αὐτὰ χωρία ποτὶ τὰ λοιπὰ, ἅ ἐντὶ ἴσα τῷ ἐσχάτῳ χωρίῳ κειμένῳ, καὶ τοῖς γνωμόνεσσι τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν ἀφαιρημένοις, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι τοῦ ὃν ἔχει ἁ ξν ποτὶ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις ταῖς τε ἡμισείαις τᾶς νο, καὶ δυσὶ τριταμορίοις τᾶς ξο. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ σχῆμα τὸ περιγεγραμ-

 μένον,

μένον, ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ ζ δ ποτὶ τὰν θ ρ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ δ ζ ποτὶ τὰν θ ρ, τοῦτον ἔχει ὁ ἀρχμένος κύλινδρος ποτὶ τὸν ψ κῶνον. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ αὐτὸς κύλινδρος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἔλασσον ἐὸν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ψ κώνου. οὐκ ἄρα ἐστὶν ἔλασσον τοῦ κώνου. ἐπεὶ δὲ οὔτε μεῖζον, οὔτε ἔλασσον, ἴσον ἄρα ἐστίν.

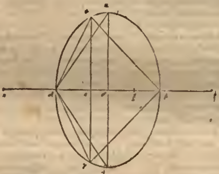
λβ Καὶ τοίνυν εἴκα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ ἔλασσον αὐτοῦ τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, τᾶ τε ἡμίσεα τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γινομένων τμαμάτων, καὶ τῷ ἄξονι τοῦ μείζονος τμάματος ποτὶ τὸν ἄξονα τοῦ μείζονος τμάματος. τετμάσθω γάρ τι σχῆμα σφαιροειδὲς, ὡς εἴρηται. καὶ τμηθέντος αὐτοῦ ἄλλῳ ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γ α εὐθεῖα. καὶ παρὰ τὰν α γ ἄχθωσαν αἱ π ρ, σ τ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδον παράλληλον τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπιψαυσοῦντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β, ζ. καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμαμάτων ἐπιζευχθεῖσαι. καὶ ἔστω ἁ β ζ. πεσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστω κέντρον τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς, τὸ θ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τετμᾶσθαι τῷ ἐπιπέδῳ τὸ σχῆμα, ἁ τομὰ ἐστὶν ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἇς διάμετρος αὐτᾶς ἁ γ α. λελάφθω οὖν ὅτι κύλινδρος ἄξονα ἔχων ἐπ' εὐθείας τᾷ β δ. οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἁ περὶ διάμετρον τὰν α γ. καὶ ὁ κῶνος ὁ κορυφὰν ἔχων τὸ β σαμεῖον, οὗ ἐν τᾷ ἐπιφανείᾳ ἐσσεῖται ἁ τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομὰ, ἁ περὶ διάμετρον τὰν α γ, ἐσσεῖται δὴ τόμος τις κυλίνδρου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχων τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, καὶ ἀπότμαμα κώνου τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ δ κ ποτὶ τὰν δ ζ. ἴσα δὲ ἔστω ἁ ζ κ τᾷ θ ζ. λελάφθω δή τις κῶνος, ἐν ᾧ τὸ ψ ποτὶ τὸ ἀπότμαμα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ δ κ ποτὶ τὰν δ ζ. εἰ οὖν μὴ ἐστὶν ἴσον τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τῷ ψ κώνῳ, ἔστω πρῶτον εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγράφθω ἐκ κυλίνδρων τομῶν ὕψος ἴσον ἐχόντων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ψ κώνου. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ κώνου, καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μείζονα λόγον ἔχων ἢ ποτὶ τὸν ψ κῶνον, ὅ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν τὸ τοῦ σφαιροειδέος τμᾶμα τοῦ ψ κώνου μεῖζον. ἀλλ' ἔστω εἰ δυνατὸν ἔλασσον. ἐγγεγραμμένον δὴ πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα σχῆμα στερεὸν, καὶ ἄλλο περιγεγραμμένον ἐκ κυλίνδρου τομῶν ὕψος ἐχόντων συγκείμενα. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος ὑπερέχειν ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ψ κῶνος τοῦ τμάματος. πάλιν δὲ διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται τὸ περιγεγραμμένον ἔλασσον τοῦ ψ κώνου. καὶ ὁ τόμος τοῦ κυλίνδρου ὁ βάσιν ἔχων τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα λόγον ἔχων,



ἢ ποτὶ

ἁ ποτὶ τὸν τοῦ κώνου, ὃ δὴ ἀδύνατον. οὐκ ἐσσεῖται οὖν οὐδ᾽ ἔλασσον τὸ τμᾶμα τοῦ κώνου. φανερὸν οὖν ὡς δεῖ δεῖξαι.

Παντὸς σχήματος σφαιροειδέος ἐπιπέδῳ τμαθέντος ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα συναμφοτέραις τᾷ τε ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος καὶ τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονι, ποτὶ τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμάματος ἄξονα. τετμάσθω τι σφαιροειδὲς ὡς εἴρηται, τμαθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν τμάματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ ὀξυγωνίου κώνου τομά, διάμετρος δὲ αὐτᾶς καὶ ἄξων τοῦ σχήματος ἁ β δ. τοῦ τέμνοντος δὲ ἐπιπέδου ἁ γ α εὐθεῖα. ἐσσεῖται δὴ αὐτὰ ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ β δ. ἔστω δὲ μεῖζον τῶν τμαμάτων οὗ κορυφὰ τὸ β. καὶ κέντρον τοῦ σφαιροειδέος τὸ θ. κείσθω δὴ ἁ δ η τᾷ δ θ ἴσα, καὶ ἁ β ζ τᾷ αὐτᾷ ἴσα. δεικτέον ὅτι τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, οὗ κορυφὰ τὸ β, ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τετμάσθω δὴ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου κύκλου κῶνος ἔστω κορυφὰν ἔχων τὸ δ σαμεῖον. ἐσσεῖται δὴ τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς διπλάσιον τοῦ τμάματος. κδ

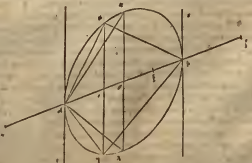


τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον. τὸ δὲ εἰρημένον τμᾶμα διπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν. δέδεικται γὰρ ταῦτα. τὸ ὅλον οὖν σφαιροειδὲς τετραπλάσιον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ εἰρημένου. ὁ δὴ κῶνος οὗτος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ δ ποτὶ τὰν ε δ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε α. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς κ θ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ε α, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ β θ, θ δ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ θ δ ποτὶ τὰν ε δ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ξ δ ποτὶ τὰν θ δ. ἕξει οὖν καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ, ὃν ἁ δ θ ποτὶ τὰν δ ε. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ξ δ, θ β, ποτὶ τὸ ὑπὸ β θ δ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, θ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ἔχει οὖν ὁ μὲν κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν κ λ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. ὁ δὲ κῶνος ὁ βάσιν ἔχων τὸν κύκλον τὸν περὶ διάμετρον τὰν α γ, κορυφὰν δὲ τὸ δ σαμεῖον, ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ βάσιν ἔχον τὰν αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ζ ε, ε δ. τουτέστιν ἁ β ε ποτὶ ε ζ. τὸ γὰρ ἔλασσον ἢ ἥμισυ τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ συναμφοτέραις ἴσα, τᾷ τε ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος τοῦ σφαιροειδέος, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ μείζονος τμάματος, ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ μείζονος τμάματος. οὗτος δέ ἐστιν ὃν ἔχει ἁ ζ ε ποτὶ τὰν β ε. ὁ ἄρα κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισείῳ τοῦ σφαιροειδέος, ποτὶ τὸ τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τοῦ ἥμισυ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, δ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν ἐν τῷ ἡμισυ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, ξ δ. τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἡμισείῳ τοῦ σφαιροειδέος πο-

τὶ

τὶ τὸ τμῆμα τὸ ἔλασσον, ἢ τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἔχει καὶ τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ τμῆμα τὸ ἔλασσον αὐτοῦ, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ κ, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε δ. ὥστε καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχὰ, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ κ, ξ δ, τοῦ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ πρὸς τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε δ. ὑπερέχει δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ κ, ξ δ, τοῦ ὑπὸ τᾶν ζ κ, ε δ, τῷ τε ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε κ περιεχομένῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ξ ε. ἔχει ἄρα τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος πρὸς τὸ ἔλαττον, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε κ, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ξ ε, ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ κ, ε δ. τὸ δὲ ἔλασσον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον, τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν αὐτῷ, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ζ ε ποτὶ τὰν β ε. ὁ δὲ κῶνος ὁ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν τῷ μείζονι τμήματι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον. τὸν γὰρ τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι οἱ κῶνοι, ἐπεὶ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτάν, ἔχοι ἂν καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸν κῶνον τὸν ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένον ὥσπερ τὸν λόγον, ὃν τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε κ, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ξ ε, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς β ε. οὗτος δὲ αὐτός ἐστι τῷ ὃν ἔχει ἁ ε κ ποτὶ τὰν ε δ. τὸ γὰρ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε κ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε δ, ὥσπερ ἔχει λόγον, ὃν ἁ ε κ ποτὶ τὰν ε δ. καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ξ ε περιεχόμενον ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, θ ε, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον (ε δ) ὃν ἁ ε κ ποτὶ τὰν ε δ. ἁ γὰρ ξ ε ποτὶ τὰν θ ε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ε κ ποτὶ τὰν ε δ, διὰ τὸ ἀνάλογον εἶμεν τὰς ξ δ, θ δ, δ ε. καὶ τὰν θ δ ἴσαν τε εἶμεν τᾷ κ δ. καὶ τὸ ἴσον οὖν ἀμφοτέροις τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε κ, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ξ ε, ποτὶ τὸ ἴσον συναμφοτέροις, τῷ τε ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε δ, καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, θ ε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ ε κ ποτὶ τὰν ε δ. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ε β τετράγωνον, ἴσον ἐστὶν ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε δ. καὶ τῷ ὑπὸ τᾶν ζ ε, θ ε. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ τᾶς β θ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶν ξ δ, ε δ περιεχομένῳ. ἁ δ' ὑπεροχὰ ᾇ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τᾶς β θ, ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ζ ε, θ ε. ἐπεὶ ἴσαι ἁ β θ, β ζ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ μεῖζον τοῦ σφαιροειδέος τμῆμα, ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὥσπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε κ ποτὶ τὰν ε δ.

λδ Καὶ τοίνυν ἂν κα μὴ ὀρθῷ ποτὶ τὸν ἄξονα τῷ ἐπιπέδῳ τμαθῇ τὸ σφαιροειδὲς, μὴ δὲ διὰ τοῦ κέντρου τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτοῦ ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτὸν, ὥσπερ ἕξει τὸν λόγον, ὃν αἱ συναμφότεραι, ἅτε ἡμίσεια τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς κορυφὰς τῶν γεγενημένων τμημάτων, καὶ τῷ ἄξονι τῷ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος ποτὶ τὸν ἄξονα τὸν τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. τετμάσθω τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ ὡς εἴρηται. τμηθέντος δὲ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ ἄλλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ ποτὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, τοῦ μὲν σχήματος τομὰ ἔστω ἁ α β γ δ, ὀξυγωνίου κώνου τομά. τοῦ δὲ τέμνοντος ἐπιπέδου τὸ σχῆμα ἁ γ α εὐθεῖα. παρὰ δὲ τὰν α γ ἄχθωσαν αἱ π ε, ς τ ἐπιψαύουσαι τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὰ β, δ. καὶ ἀνεστακέτω ἀπ' αὐτᾶν ἐπίπεδα παράλληλα τῷ κατὰ τὰν α γ. ἐπιψαύοντι δὲ ταῦτα τοῦ σφαιροειδέος κατὰ τὰ β, δ, καὶ ἐσσοῦνται κορυφαὶ τῶν τμημάτων τὰ β, δ. ἄχθω οὖν ἁ τὰς κορυφὰς ἐπιζευγνύουσα τῶν γεγενημένων τμαμάτων ἁ β δ. πεσεῖται δὲ αὐτὰ διὰ τοῦ κέντρου,



καὶ ἔστω κέντρον τὸ θ, μεῖζον ὄντος τοῦ ἡμίσεος τοῦ σφαιροειδέος τμάματος οὗ κορυφὰ τὸ β. ποτικείσθω δὲ ἁ δ κ ἴσα τᾷ δ θ, καὶ ἁ β ζ τᾷ αὐτᾷ. δεικτέον ὅτι τὸ τμῆμα τοῦ σφαιροειδέος, τὸ μεῖζον ποτὶ τὸ ἀ-

πότμημα

ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμήματι, καὶ ἄξονα τὸν αὐτόν, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον, ὃν ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ. τετμάσθω γὰρ τὸ σφαιροειδὲς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρου παραλλάλῳ τῷ ἐπιπέδῳ α γ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ἡμίσεον τοῦ σφαιροειδέος ἀπότμημα κώνου, κορυφὰν ἔχον τὸ δ σαμεῖον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ δ θ ποτὶ τὰν ε δ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ξ δ ποτὶ τὰν θ δ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται, ὅτι ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι ἐγγεγραμμένου, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. καὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ τμᾶμα τὸ ἐν ᾧ ἐγγέγραπται, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἕξει οὖν τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ξ δ, β θ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἕξει οὖν τὸ μὲν ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἡμισέῳ τοῦ σφαιροειδέος ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β θ, ξ δ. τετραπλάσιον γὰρ ἑκάτερον ἑκατέρου, τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου τὸ εἰρημένον ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ξ δ, β θ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ἕξει οὖν τὸ ὅλον σφαιροειδὲς ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα αὐτοῦ τοῦ σφαιροειδέος τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. ὥστε δὲ τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ζ η, ξ δ, τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ. τὸ δὲ ἔλασσον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ. δέδεικται γὰρ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ ζ ε ποτὶ τὰν β ε. τὸ δὲ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ ἐλάσσονι τμήματι ἐγγεγραμμένου, ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν β ε, ε δ, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον. τὰ γὰρ ἀποτμήματα τῶν κώνων τὰ εἰρημένα τὸν τῶν ὑψέων λόγον ἔχοντι (τὰν αὐτὰν) τὰ δὲ ὕψεα αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντι τὸν τᾶς δ ε πρὸς τὰν ε β. ἕξει καὶ τὸ μεῖζον τμᾶμα τοῦ σφαιροειδέος ποτὶ τὸ ἀπότμημα τοῦ κώνου τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ὑπεροχά, ᾇ ὑπερέχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν η ζ, ξ δ, τοῦ ὑπὸ τᾶν ζ ε, ε δ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β ε τετράγωνον. ὁ δὲ λόγος οὗτος, ὁμοίως τῷ πρότερον δειχθέντι, ὁ αὐτὸς ἐὼν τῷ ὃν ἔχει ἁ ε η ποτὶ τὰν ε δ.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ἙΛΙΚΩΝ.

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΩΣΙΘΕΩ ΧΑΙΡΕΙΝ.

Τῶν ποτὶ Κόνωνα ἀποσταλέντων θεωρημάτων, ὑπὲρ ὧν αἰεὶ τὰς ἀποδείξιας ἐπιστέλλεις μοι γράψαι, τῶν μὲν πλείστων ἐν τοῖς ὑπὸ Ἡρακλείδα κομισθέντεσσιν ἔχεις γεγραμμένας, τινὰς δὲ αὐτῶν καὶ ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράψας, ἐπιστέλλω τοι. μὴ θαυμάσῃς δέ, εἰ πλείονα χρόνον ποιήσαντες ἐκδίδομεν τὰς ἀποδείξιας αὐτῶν. συμβαίνει γὰρ τοῦτο γεγενῆσθαι, διὰ τὸ βούλεσθαί με πρότερον διδόμεν τοῖς περὶ τὰ μαθήματα πραγματευομένοις, καὶ ματεύειν αὐτὰ προαιρουμένοις. πόσα γὰρ τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχᾷ φανέντα χρόνῳ τὴν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι, Κόνων μὲν οὐχ ἱκανὸν λαβὼν εἰς τὰν ματεύσιν αὐτῶν χρόνον μετάλλαξεν τὸν βίον, καὶ ἄδηλα ἐποίησεν. καὶ ταῦτα πάντα εὑρών, καὶ ἄλλα πολλὰ ἐξευρών, καὶ ἐπὶ τὸ πλεῖον προάγαγε γεωμετρίαν. ἐπιστάμεθα γὰρ ὑπάρξασαν αὐτῷ σύνεσιν οὐ τὰν τυχοῦσαν περὶ τὸ μάθημα, καὶ φιλοπονίαν ὑπερβάλλουσαν, μετὰ δὲ τὰν Κόνωνος τελευτὰν πολλῶν ἐτέων ἤδη γεγενημένων, οὐδ' ὑφ' ἑνὸς οὐδὲν τῶν προβλημάτων αἰσθανόμεθα κεκινημένον. βούλομαι δὲ καθ' ἓν ἕκαστον αὐτῶν προενεγκεῖσθαι. καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ μὲν κεχωρισμένων, τέλος δὲ ποτιέσομεν, ὅπερ οἱ φάμενοι μὲν πάντα εὑρίσκειν, ἀπόδειξιν δὲ αὐτῶν οὐδεμίαν ἐκφέροντες ἐλέγχονται, ἀπὸ δ' ὁμολογηκότες εὑρίσκειν τὰ ἀδύνατα. τοῦτα δὴ ποῖα τῶν προβλημάτων ἐντί, καὶ τίνων τὰς ἀποδείξιας ἔχεις ἀπεσταλμένας, καὶ ποίων ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ κομίζοντες δοκιμάζοντες ἐμφανίσαι τοι. πρῶτον δὴ τῶν προβλημάτων ἦν, σφαίρας δοθείσας ἐπίπεδον χωρίον εὑρεῖν ἴσον τᾷ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας, ὃ δὴ καὶ πρᾶτον ἐγένετο φανερόν, ἐκδοθέντος τοῦ περὶ τὴν

σφαίρας βιβλίῳ. δειχθέντος γὰρ ὅτι πάσας σφαίρας ἁ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τᾶ σφαίρα, δῆλον ὡς δυνατόν ἐστι χωρίον ἐπίπεδον εὑρεῖν ἴσον τᾶ ἐπιφανείᾳ τᾶς σφαίρας. δεύτερον δέ, κώνου δοθέντος ἢ κυλίνδρου, σφαίραν εὑρεῖν ἴσαν τῷ κώνῳ ἢ τῷ κυλίνδρῳ. τρίτον δέ, τὰν δοθεῖσαν σφαίραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ποτ' ἄλλαλα τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. τέταρτον δέ, τὰν δοθεῖσαν σφαίραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμάματα τᾶς ἐπιφανείας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν ποτ' ἄλλαλα. πέμπτον δέ, τὸ δοθὲν τμᾶμα σφαίρας, τῷ δοθέντι τμάματι σφαίρας ὁμοιῶσαι. ἕκτον δέ, δύο δοθέντων τμαμάτων σφαίρας, εἴτε τᾶς αὐτᾶς, εἴτε ἄλλας, εὑρεῖν τι τμᾶμα σφαίρας, ὃ ἐσσεῖται αὐτὸ μὲν ὅμοιον τῷ ἑτέρῳ τῶν τμαμάτων, τὰν δὲ ἐπιφάνειαν ἴσαν ἕξει τᾶ ἐπιφανείᾳ τοῦ ἑτέρου τμάματος. ἕβδομον, ἀπὸ τᾶς δοθείσας σφαίρας τμᾶμα ἀποτεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμᾶμα ποτὶ τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν μὴ μείζονα τοῦ ὃν ἔχει τὰ τρία ποτὶ τὰ β. τούτων μὲν τῶν εἰρημένων πάντων τὰς ἀποδείξιας, Ἡρακλείδας ἐκόμισεν. τὸ δὲ μετὰ ταῦτα κεχωρισμένον ψεῦδός ἐστιν. ἔστι δέ, εἴκα σφαίρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον διπλασίονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ μείζων ἐπιφάνεια ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, διὰ τῶν προαπεσταλμένων φανερόν ἐστι. κεχώρισται γὰρ ἐν αὐτοῖς τόδε. εἴκα σφαίρα ἐπιπέδῳ τμαθῇ εἰς ἄνισα πρὸς ὀρθὰς διαμέτρῳ τινὶ τῶν ἐν τᾶ σφαίρα, τὸ μεῖζον τμᾶμα ποτὶ τὸ ἔλασσον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν τὸ τμᾶμα τὸ μεῖζον τᾶς διαμέτρου ποτὶ τὸ ἔλασσον. τὸ γὰρ μεῖζον τμᾶμα τᾶς σφαίρας ποτὶ τὸ ἔλασσον, ἐλάσσονα μὲν ἢ διπλάσιον λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἁ μείζων ἐπιφάνεια πρὸς τὴν ἐλάσσονα, μείζονα δέ, ἢ ἡμιόλιον. ἦν δὲ καὶ τὸ ἔσχατον κεχωρισμένον τῶν προβλημάτων ψεῦδος, ὅτι εἴκα σφαίρας τινὸς ἡ διάμετρος τμαθῇ, ὥστε τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμάματος τετράγωνον τριπλάσιον εἶμεν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμάματος, καὶ διὰ τοῦ σαμείου τὸ ἐπίπεδον ἀχθὲν ποτ' ὀρθὰς τᾶ διαμέτρῳ τέμνῃ τὴν σφαίραν, τὸ τοιοῦτον τῷ εἴδει σχῆμα, οἷόν ἐστι τὸ μεῖζον τᾶς σφαίρας τμᾶμα, μέγιστόν ἐστι τῶν ἄλλων τμαμάτων τῶν ἐχόντων ἴσαν τὰν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ψεῦδός ἐστι, δῆλον, διὰ τῶν προαπεσταλμένων θεωρημάτων. δέδεικται γάρ, ὅτι τὸ ἡμισφαίριον μέγιστόν ἐστι τῶν περιεχομένων ὑπὸ ἴσας ἐπιφανείας σφαίρας τμαμάτων. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τοῦ κώνου προβεβλημένα ἐστὶ τάδε. εἴκα ὀρθογωνίου κώνου τομὰ μενούσας τᾶς διαμέτρου περιενεχθῇ, ὥστε εἶμεν ἄξονα τὰν διάμετρον, τὸ περιγραφὲν σχῆμα ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κωνοειδὲς καλείσθω. καὶ εἴκα τοῦ κωνοειδέος σχήματος ἐπίπεδον ἐπιψαύῃ, παρὰ δὲ τὸ ἐπιψαῦον ἐπίπεδον ἄλλο ἐπίπεδον ἀχθὲν ἀποτέμνῃ τι τμᾶμα τοῦ κωνοειδέος, τοῦ ἀποτμαθέντος τμάματος βάσις μὲν καλείσθω τὸ ἀποτέμνον ἐπίπεδον, κορυφὰ δὲ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ ἐπιψαύει τὸ ἕτερον ἐπίπεδον τοῦ κωνοειδέος. εἰ δὲ καὶ τὸ εἰρημένον σχῆμα, ἐπιπέδῳ τμαθῇ ποτ' ὀρθὰς τῷ ἄξονι, ὅτι μὲν ἁ τομὰ κύκλος ἐσσεῖται, δῆλον. ὅτι δὲ τὸ ἀποτμαθὲν τμᾶμα ἡμιόλιον ἐσσεῖται τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, δεῖξαι δεῖ. καὶ εἴκα τοῦ κωνοειδέος δύο τμάματα ἀποτμαθέωντι ἐπιπέδοις ὁποσοιοῦν ἀγμένοις. ὅτι μὲν οὖν αἱ τομαὶ ἐσσοῦνται ὀξυγωνίου κώνου τομαί, δῆλον, εἴκα τὰ ἀποτέμνοντα ἐπίπεδα μὴ ὀρθὰ ἔωντι ποτὶ τὸν ἄξονα. ὅτι δὲ τὰ τμάματα ποτ' ἄλλαλα τοῦτον ἑξοῦντι τὸν λόγον, ὃν ἔχοντι δυνάμει ποτ' ἀλλάλας, αἱ ἀπὸ τᾶν κορυφᾶν αὐτῶν ἀγμέναι παρὰ τὸν ἄξονα μέχρι τὰ ἐπίπεδα τέμνοντα, δεῖξαι δεῖ. τούτων δὲ αἱ ἀποδείξιας οὔπω σοι ἀποστέλλονται. μετὰ δὲ ταῦτα περὶ τᾶς ἕλικος ἦν προβεβλημένα ταῦτα. ἐντὶ δὲ ὥσπερ ἄλλο τι γένος προβλημάτων οὐδὲν ἐπικοινωνοῦντα τοῖς προειρημένοις, ὑπὲρ ὧν ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ τὰς ἀποδείξιας γεγραφήκαμέν σοι. ἐντὶ δὲ τάδε.

ΠΕΡΙ ΕΛΙΚΩΝ.

Εἴκα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ, πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ τᾷ περιφερομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. φαμὶ δὴ τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἀποκατασταθείσας ὅθεν ὥρμασεν, τρίτον μέρος εἶμεν τοῦ κύκλου τοῦ γραφέντος, κέντρου μὲν τοῦ μένοντος σαμείου, διαστήματι δὲ τᾶς εὐθείας τᾶς διανυσθείσας ὑπὸ τοῦ σαμείου ἐν τᾷ μιᾷ περιφορᾷ τᾶς εὐθείας. καὶ εἴκα τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος τὸ ἔσχατον γενόμενον. ἄλλα δέ τις εὐθεῖα τᾷ περιαχθείσᾳ καὶ ἀποκατασταθείσᾳ γραμμᾷ ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ, ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος εἰς τὸ αὐτό, ὥστε ἐμπεσεῖν τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, φαμὶ τὰν ποταχθεῖσαν εὐθεῖαν ἴσαν εἶμεν τᾷ τοῦ κύκλου περιφορᾷ. καὶ εἴκα ἁ περιαγομένα γραμμὰ καὶ τὸ σαμεῖον, τὸ φερόμενον κατ' αὐτᾶς, πλεονάκις περιφορὰς περιενεχθέωντι καὶ ἀποκατασταθέωντι πάλιν ὅθεν ὥρμασεν. φαμὶ τὸ χωρίον, τὸ ἐν

τᾶς δευτέρας περιφορᾶς ποτιλαφθέντος ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τὸ μὲν ἐν τᾷ τρίτᾳ ποτιλαφθὲν διπλάσιον ἐσσεῖται, τὸ δὲ ἐν τᾷ τετάρτᾳ τριπλάσιον, τὸ δὲ ἐν τᾷ πέμπτᾳ τετραπλάσιον, καὶ ἀεὶ τὰ ἐν ταῖς ὕστερον περιφοραῖς ποτιλαμβανόμενα χωρία ἐπὶ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσια ἐσσεῖται, τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος. τὸ δὲ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθὲν χωρίον ἕκτον μέρος εἶμεν, τοῦ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ ποτιλαφθέντος χωρίου. καὶ εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέωντι, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς περιενεχθείσας γραμμᾶς, καὶ κύκλοι δύο γραφέωντι κέντρῳ μὲν τῷ μεμενακότι σημείῳ, διαστήμασι δὲ ταῖς ἐπιζευχθείσαις ἐπὶ τὸ μεμενακὸς πέρας τᾶς εὐθείας, καὶ ἐλάσσων τᾶν ἐπιζευχθεισᾶν ἐκβληθῇ, φαμὶ τὸ ποτιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς τοῦ μείζονος κύκλου περιφερείας τᾶς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾷ ἕλικι μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν ἐούσας, καὶ τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας ποτὶ τὸ ποτιλαφθὲν χωρίον, ὑπό τε τᾶς τοῦ ἐλάσσονος κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτῶν, τοῦτον ἕξειν τὸν λόγον ὃν ἔχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ δύο τριταμοριᾶν τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετ' ἑνὸς τριταμορίου τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς. τούτων δὲ καὶ ἄλλων περὶ τᾶς ἕλικος αἱ ἀποδείξιες ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ γράφονται. προκεινται δὲ ὡς καὶ τῶν ἄλλων τῶν γεωμετρουμένων τὰ χρέαν ἔχοντα, εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν. λαμβάνω δὲ καὶ ἐν τούτοις τῶν ἐν τοῖς πρότερον ἐκδεδομένοις βιβλίοις λήμμα τόδε. τᾶν ἀνίσων γραμμᾶν, καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμέναν, δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων.

Εἴκα ἐπί τινος γραμμᾶς ἐνεχθῇ τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον, καὶ λαφθέωντι ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαί, αἱ λαφθεῖσαι τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας, ὃν περ οἱ χρόνοι ἐν οἷς τὸ σημεῖον τὰς γραμμὰς ἐπορεύθη. ἐνηνέχθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τᾶς αβ γραμμᾶς ἰσοταχέως, καὶ λελάφθωσαν ἐν αὐτᾷ δύο γραμμαὶ αἱ γδ, δε. ἔστω δὲ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γδ γραμμὰν τὸ σημεῖον διεπορεύθη ὁ ζη, ἐν ᾧ δὲ τὰν δε ὁ ηθ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ γδ γραμμὰ ποτὶ τὰν δε γραμμάν, ὃν χρόνος ὁ ζη ποτὶ τὸν ηθ. συγκείσθωσαν γὰρ ἐκ τῶν γδ, δε γραμμᾶν αἱ αδ, δβ γραμμαὶ καθ' ὁποιανοῦν σύνθεσιν οὕτως, ὥστε ὑπερέχειν τὰν αδ τᾶς δβ. καὶ ὁσάκις μὲν σύγκειται ἁ γδ γραμμὰ ἐν τᾷ αδ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ χρόνος ὁ ζη ἐν τῷ χρόνῳ τῷ λη. ὁσάκις δὲ σύγκειται ἁ δε 

γραμμὰ ἐν τᾷ δβ, τοσαυτάκις συγκείσθω ὁ θη χρόνος ἐν τῷ κη χρόνῳ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται τὸ σημεῖον ἰσοταχέως ἐνηνέχθαι κατὰ τᾶς αβ γραμμᾶς, δῆλον ὡς ἐν ὅσῳ χρόνῳ τὰν γδ διαπορεύεται, ἐν τοσούτῳ καὶ ἑκάσταν διαπορεύεται τᾶν ἴσαν τᾷ γδ. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ συγκειμέναν τὰν αδ γραμμάν, ἐν τοσούτῳ χρόνῳ διαπορεύεται, ὅσος ἐστὶν ὁ λη χρόνος, ἐπειδὴ τοσαυτάκις σύγκειται ἅ τε γδ γραμμὰ ἐν τᾷ αδ γραμμᾷ, καὶ ὁ ζη χρόνος ἐν τῷ λη χρόνῳ. διὰ ταῦτα δὴ καὶ τὰν βδ γραμμὰν ἐν τοσούτῳ χρόνῳ τὸ σημεῖον διαπορεύεται, ὅσος ἐστὶν ὁ κη χρόνος. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἁ αδ γραμμὰ τᾶς βδ, δῆλον ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ τὸ σημεῖον τὰν δα διαπορεύεται γραμμάν, ἢ τὰν βδ. ὥστε ὁ χρόνος ὁ λη μείζων ἐστὶ τοῦ κη χρόνου. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα ἐκ τῶν χρόνων τῶν ζη, ηθ συντεθέωντι χρόνοι καθ' ὁποιανοῦν σύνθεσιν, ὥστε ὑπερέχειν τὸν ἕτερον τοῦ ἑτέρου, ὅτι καὶ τᾶν ἐκ τᾶν γραμμᾶν τᾶν γδ, δε, κατὰ τὰν αὐτὰν σύνθεσιν συντεθεισᾶν ὑπερέξει ἁ ὁμόλογος τῷ ὑπερέχοντι χρόνῳ. δῆλον οὖν ὅτι τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ γδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ὁ χρόνος ὁ ζη ποτὶ τὸν χρόνον τὸν ηθ.

Εἴκα δύο σημείων ἑκατέρου ἐπί τινος γραμμᾶς ἐνεχθέντος, μὴ τᾶς αὐτᾶς, ἰσοταχέως αὐτοῦ ἑαυτῷ φερομένου, λαφθέωντι ἐν ἑκατέρᾳ τᾶν γραμμᾶν δύο γραμμαί, αἵ τε πρᾶται ἐν ἴσοις χρόνοις ὑπὲρ τῶν σημείων διανύεσθαι, καὶ αἱ δεύτεραι, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον ποτ' ἀλλάλας αἱ λαφθεῖσαι γραμμαί. ἔστω ἐπὶ τᾶς αβ γραμμᾶς ἐνηνεγμένον τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ, καὶ ἄλλο ἐπὶ τᾶς κλ. λελάφθωσαν δὲ ἐν τᾷ αβ δύο αἱ γδ, δε γραμμαί, καὶ ἐν τᾷ κλ αἱ ζη, ηθ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ τὸ ἐπὶ τᾶς αβ γραμμᾶς ἐνηνεγμένον σημεῖον τὰν γδ γραμμὰν διαπορευέσθω, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον ἐπὶ τᾶς κλ ἐνηνεγμένον τὰν ζη, ὁμοίως καὶ τὰν δε γραμμὰν ἐν ἴσῳ διαπορευέσθω τὸ σημεῖον, ἐν ὅσῳ τὸ ἕτερον τὰν ηθ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ γδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ἁ ζη

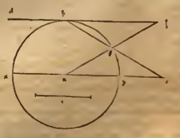
ποτὶ τὰν κθ. ἔστω δὲ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὰν γδ γραμμὰν διαπορεύεται τὸ σημεῖον ὁ μν. ἐν τούτῳ δὴ τῷ χρόνῳ καὶ τὸ ἕτερον σημεῖον διαπορεύεται τὰν ζη. πάλιν δὴ καὶ ἐν ᾧ τὰν δε γραμμὰν διαπορεύεται τὸ σαμεῖον, ἔστω ὁ νξ χρόνος. ἐν τούτῳ δὴ καὶ τὸ ἕτερον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ηθ. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἑξοῦντι ἅ τε γδ ποτὶ τὰν δε γραμμάν, ὃν ὁ χρόνος ὁ μν πρὸς νξ. καὶ ἁ ζη ποτὶ τὰν ηθ, ὃν ὁ χρόνος ὁ μν ποτὶ τὸν νξ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἅ τε γδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ἁ ζη ποτὶ τὰν ηθ.



γ Κύκλων δοθέντων ὁποσωνοῦν τῷ πλήθει, δυνατόν ἐστιν εὐθεῖαν λαβεῖν μείζονα ἔσσαν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν. περιγραφέντος γὰρ περὶ ἕκαστον τῶν κύκλων πολυγώνου, δῆλον ὡς ἡ ἐκ πασῶν συγκειμένη τῶν περιμέτρων εὐθεῖα μείζων ἔσται πασᾶν τᾶν τῶν κύκλων περιφερειᾶν.

δ Δύο γραμμᾶν δοθεισᾶν ἀνίσων, εὐθείας τε καὶ κύκλου περιφερείας, δυνατόν ἐστι λαβεῖν εὐθεῖαν τᾶς μὲν μείζονος τᾶν δοθεισᾶν γραμμᾶν ἐλάσσονα, τᾶς δὲ ἐλάσσονος μείζονα. ὁσάκις γὰρ ἡ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων γραμμὰ τᾶς ἐλάσσονος αὐτὰ συντιθεμένα ὑπερέξει τᾶς εὐθείας, ἐπὶ τοσαῦτα ἴσα διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας, τὸ ἓν τμᾶμα ἔλασσον ἔσται τᾶς ὑπεροχᾶς. εἰ μὲν οὖν καὶ ἁ περιφέρεια μείζων τᾶς εὐθείας, ἑνὸς τμάματος ποτιτεθέντος ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, τᾶς μὲν ἐλάσσονος τᾶν δοθεισᾶν, δῆλον ὡς μείζων ἐσσεῖται, τᾶς δὲ μείζονος ἐλάσσων. καὶ γὰρ ἁ ποτικειμένα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ὑπεροχᾶς.

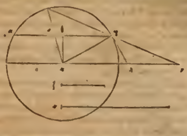
ε Κύκλου δοθέντος, καὶ εὐθείας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας, καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, ἢ ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς, καὶ τᾶς διαχθείσας ὑπό τι τὰν δοθεῖσαν ὁποιανοῦν κύκλου περιφέρειαν. δεδόσθω κύκλος ὁ αβγ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ δζ κατὰ τὸ β. δεδόσθω δὲ καὶ κύκλου περιφέρεια ὁποιαοῦν. δυνατὸν δή ἐστι τᾶς δοθείσας περιφερείας λαβεῖν τινὰ εὐθεῖαν μείζονα, καὶ ἔστω ἁ ε εὐθεῖα μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἄχθω δὴ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν δζ, ἁ ακ. καὶ κείσθω ἁ ηθ ἴσα τᾷ ε, νεύουσα ἐπὶ τὸ β. ἀπὸ δὴ τοῦ κ κέντρου ἐπὶ τὸ θ ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. τὸν αὐτὸν δὴ λόγον ἔχει ἁ θζ ποτὶ τὰν θκ, ὃν ἁ βθ ποτὶ τὰν θη. ἁ ἄρα ζθ ποτὶ τὰν θκ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἁ βθ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. διότι ἁ μὲν βθ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς βθ περιφερείας. ἁ δὲ θη μείζων τᾶς δοθείσας περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει καὶ ἁ ζθ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἁ βθ περιφέρεια ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν.



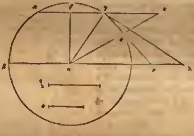
ς Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτὶ τὰν περιφέρειαν αὐτοῦ ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὰν ἐν τῷ κύκλῳ δεδομέναν γραμμάν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν εὐθεῖαν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ποτιπιπτούσας ἐπὶ τᾶς περιφερείας, ποτὶ τὸ ἕτερον πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας εὐθείας, τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἦν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δεδόσθω κύκλος ὁ αβγ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ κ. καὶ ἐν αὐτῷ δεδόσθω εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γα. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ πρὸς η, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ ποτὶ τὰν κθ, καθέτου ἐούσας τᾶς κθ. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου παρὰ τὰν αγ ἁ κν. καὶ τᾷ κγ ποτ' ὀρθὰς ἁ γλ. ὅμοια δὴ ἐστὶ τὰ γθκ, γκλ τρίγωνα. ἐστὶν οὖν ὡς ἁ γθ ποτὶ τὰν θκ, οὕτως ἁ κγ ποτὶ τὰν γλ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, ἢ ἁ κγ ποτὶ τὰν γλ. ὃν δὴ λόγον ἔχει ἁ ζ ποτὶ

τὰν

τὰν κ, ὥστε ἕξει ἁ κγ πρὸς μάζονα τᾶς γλ. ἐχέτω ποτὶ τὰν βν. κείσθω δὲ ἁ βν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας διὰ τοῦ γ. δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τεθῆμεν. καὶ πεσεῖται ἐκτὸς, ἐπεὶ μείζων ἐστὶ τᾶς γλ. ἐπεὶ οὖν ἁ βκ πρὸς βν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν ν, καὶ ἁ εβ ποτὶ βγ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ κ.



Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας, καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἀπολαφθείσας, ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἐκβεβλημένας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν, εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος μείζων ἢ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμέναν. δεδόσθω τὰ αὐτὰ, καὶ ἔστω ἁ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐκβεβλημένα. ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ἔστω ὃν ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν κ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ ποτὶ τὰν θκ. μείζων οὖν ἐσσεῖται καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κγ πρὸς γλ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ζ πρὸς κ, ὥστε ἕξει ἁ κγ πρὸς ἐλάσσονα τᾶς γλ. ἐχέτω πρὸς ιν νεύουσαν ἐπὶ τὸ γ, δυνατὸν δέ ἐστιν οὕτως τίμεναι, καὶ πεσεῖται ἐντὸς τᾶς γλ. ἐπειδὴ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς γλ. ἐπεὶ οὖν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ κγ πρὸς ιν, ὃν ἁ ζ πρὸς κ, καὶ ἁ ει πρὸς ιγ τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν κ.

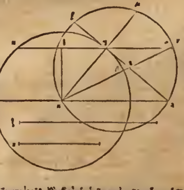


Κύκλου δοθέντος, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμᾶς ἐλάσσονος τᾶς διαμέτρου, καὶ ἄλλας ἐπιψαυούσας τοῦ κύκλου κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, δυνατόν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν τινα εὐθεῖαν ποτὶ τὰν εὐθεῖαν, ὥστε τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπ᾽ αὐτᾶς μεταξὺ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς, ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἰ καὶ ὁ δοθεὶς λόγος ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμέναν. ἔστω κύκλος δεδομένος ὁ αβγδ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα δεδόσθω, ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γα. καὶ ἁ ξλ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου κατὰ τὸ γ, καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ πρὸς κ ἔστω ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ πρὸς θκ. ἐσσεῖται δὴ ἐλάσσων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ γκ πρὸς γλ. ἀνα παράλληλος ἄχθω ἁ κλ τᾷ θγ, ἐχέ- η



του δὲ ἁ κγ πρὸς γξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ πρὸς η. μάζων δέ ἐστιν ἁ ξγ τᾶς γλ, γεγράφθω κύκλος περιφέρεια περὶ τὰ κλξ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ μάζων ἁ ξγ τᾶς γλ, καὶ ποτ᾽ ὀρθὰς ἐντὶ ἀλλάλαις αἱ κη, γλ, δυνατόν ἐστι τᾶ μγ ἴσαν ἀλλάλαν θέμεν τὰν ιν, νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ ξιλ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κιλ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὃν ἁ ξι πρὸς κι. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ξκ ιι ιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ. ὥς τε καὶ ἡ ιν πρὸς γλ ἐστίν, ὡς ἁ ξι πρὸς κι. ὥς τε καὶ ἡ γμ πρὸς γλ, καὶ ἁ ξγ πρὸς κγ. καὶ πρὸς κβ ἐστίν, ὡς ἁ ξι πρὸς κι. καὶ λοιπὰ ἁ ιγ πρὸς βι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ξγ ποτὶ τὰν γκ, καὶ ὃν ἁ ποτὶ τὸ ζ. ποτιπέπτωκεν οὖν ἁ κν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς εὐθείας ἁ βι ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ὑπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η λόγον.

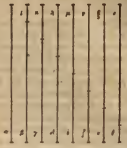
8 Τῶν αὐτῶν δεδομένων, καὶ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας γραμμᾶς ἐκβεβλημένας, δυνατόν ἐστι ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν εὐθεῖαν, ὥς τε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας ποτὶ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ὑπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ποτὶ τὰν ἁφὰν τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν. εἴκα ὁ δοθεὶς λόγος μάζων ᾖ οὗ ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ δεδομένας, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγομέναν. δεδόσθω κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ γα διήχθω, καὶ ἐπιψαυέτω τοῦ κύκλου ἁ ξγ κατὰ τὸ γ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ ζ ποτὶ τὰν η, μάζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ γθ ποτὶ τὰν θκ. ἔσται δὲ μάζων καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ κγ ποτὶ τὰν γλ. ἐχέτω οὖν ἁ κγ ποτὶ τὰν γξ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν αὕτη τᾶς γλ. πάλιν δὲ γεγράφθω κύκλος διὰ τῶν ξκλ σαμείων. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἁ ξγ τᾶς γλ, καὶ ποτ᾽ ὀρθάς ἐντι ἀλλάλαις αἱ κμ, ξγ, δυνατὸν τᾶ γμ ἴσαν θέμεν τὰν ιν νεύουσαν ἐπὶ τὸ κ. ἔστιν οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ξιλ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν λικ ἐστίν, ὡς ξι πρὸς κι. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ξιλ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κιν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν λικ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν κιγλ, διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν κι πρὸς ικ, οὕτως τὴν λγ πρὸς λι. καὶ ὡς ἄρα ἡ ξι πρὸς κι, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν κιν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν κι γλ. τουτέστιν ὡς νι πρὸς γλ, τουτέστιν ἡ γμ πρὸς γλ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἡ γμ πρὸς γλ, οὕτως ἡ ξγ πρὸς κγ, τουτέστι πρὸς κβ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ξι πρὸς κι, ἡ ξγ πρὸς κβ. καὶ λοιπὴ ἡ ιγ πρὸς λοιπὴν τὴν βι ἐστίν, ὡς ἡ ξγ πρὸς γκ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἡ ξγ πρὸς γκ, τοῦτον ἔχει ἡ η πρὸς ζ. ποτιπέπτωκε δὲ ἁ κι ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν, καὶ ἁ μεταξὺ τᾶς ἐκβεβλημένας καὶ τᾶς περιφερείας ἁ βι ποτὶ τὰν γι, τὰν ὑπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας ἀπολαφθεῖσαν τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ζ ποτὶ τὰν η.



6 Εἴκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾶ ἐλαχίστα, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα τᾶ μεγίστα, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾶ μεγίστα, ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἐλαχίστας καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχούσαις, τριπλάσια ἐσσοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων, τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. ἔστω γραμμαὶ ὁποσαιοῦν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἁ δὲ θ ἴσα ἔστω τᾶ ὑπεροχᾶ. ποτικείσθω δὲ ποτὶ τὰν β ἴσα τᾶ θ ἁ ι, ποτὶ δὲ τὰν γ ἁ κ ἴσα τᾶ η. ποτὶ δὲ τὰν δ ἁ λ ἴσα τᾶ ζ. ποτὶ δὲ τὰν ε ἁ μ ἴσα τᾶ ε. ποτὶ δὲ τὰν ζ ἁ ν ἴσα τᾶ δ. ποτὶ δὲ τὰν η ἁ ξ ἴσα τᾶ γ. ποτὶ δὲ τὰν θ ἁ ο ἴσα τᾶ β. ἐσσοῦνται δὲ αἱ γενόμεναι ἴσαι ἀλλάλαις, καὶ τᾶ μεγίστα. δεικτέον οὖν, ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν τε α, καὶ τᾶν γενομένων, ποτιλαβόντα τό τε ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, τριπλάσια ἐντὶ τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν

α, β,

α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ἐπεὶ δὴ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς β ι τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ι, β τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν β, ι περιεχομένοις. τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς κ γ, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν κ, γ τετραγώνοις, καὶ δὶς ὑπὸ τῶν κ, γ περιεχομένῳ. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τᾶν ἴσαν τᾷ α τετράγωνα, ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τετραγώνοις, καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν τμαμάτων περιεχομένοις. τὰ μὲν οὖν ἀπὸ τᾶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, διπλάσια ἐντὶ τῶν ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετραγώνων. λοιπὸν δὲ ἐπιδείξομεν, ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν τμαμάτων ἐν ἑκατέρᾳ γραμμᾷ τᾶν ἴσαν τᾷ α, ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἴσα δὶς ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ β, ι περιεχόμενα, ἴσα δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν β, θ περιεχομένοις. δύο δὲ τὰ ὑπὸ τῶν κ, γ ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς γ, διὰ τὸ τὰν κ διπλασίονα εἶμεν τᾶς θ. δύο δὲ τὰ ὑπὸ τᾶν δ, λ ἴσα τῷ ὑπό τᾶς θ, καὶ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς δ, διὰ τὸ τὰν λ τριπλασίαν εἶμεν. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων, ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς πολλαπλασίας ἀεὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς, ἀρτίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. τὰ οὖν σύμπαντα ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ἐσοῦνται ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσου πάσαις τᾷ τε α, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς β, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς γ. καὶ ἀεὶ τὰ περισσὰ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσὸς πολλαπλασίως τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. ἐντὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν αὐτᾶν γραμμᾶν. ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς α τετράγωνον, ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε α καὶ τᾷ ἴσᾳ ταῖς λοιπαῖς, ὧν ἑκάστα ἴσα τᾷ α. ἰσάκις γὰρ μετρεῖ ἅ τε θ τὰν α, καὶ ἁ α τὰς ἴσας αὐτᾷ πάσας σὺν τᾷ α. ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ α τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾷ α, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τῶν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. αἱ γὰρ ἴσαι τᾷ α πᾶσαι χωρὶς τᾶς α, διπλάσιαι ἐντὶ τᾶν β, γ, δ, ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς β τετράγωνον ἴσον ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας, τᾷ τε β καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν γ, δ, ε, ζ, η, θ. καὶ πάλιν τὸ ἀπὸ τᾶς γ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας τᾷ τε γ, καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν ε, ζ, η, θ. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς περιεχομένοις ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας αὐτᾷ τε καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν λοιπᾶν. δῆλον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τετράγωνα, ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς θ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε α, καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς β, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς γ. καὶ τὰ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσὸς πολλαπλάσια τᾶς ἑπομένας.

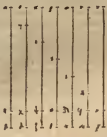


Ἐκ τούτου οὖν φανερὸν, ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια. ἐπεὶ δὲ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσια ἐντί. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονα ἐστὶν ἢ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου. καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια εἴδεα ἀναγραφέωντι, ἀπὸ πασᾶν ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων, ἐλάσσονα ἐσσοῦνται, ἢ τριπλάσια. τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας εἴδεος, μείζονα ἢ τριπλάσια. τὸν γὰρ αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

Εἴκα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν, τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι, τὸ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τὸ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐ- ια

λαχί-

λαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετραγώνου, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου, μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστων γὰρ γραμμαὶ ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἑξῆς κείμεναι, ἁ μὲν α β τᾶς γ δ, ἁ δὲ γ δ τᾶς ε ζ, ἁ δὲ ε ζ τᾶς η θ, ἁ δὲ η θ τᾶς ι κ, ἁ δὲ ι κ τᾶς λ μ, ἁ δὲ λ μ τᾶς ν ξ. ποτικείσθω δὴ ποτὶ μὲν τὰν γ δ ἴσα μιᾷ ὑπεροχᾷ ἁ γ ο. ποτὶ δὲ τὰν ε ζ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς, ἁ ε π. ποτὶ δὲ τὰν η θ ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἁ η ρ. καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον. ἐσσοῦνται δὴ αἱ γινόμεναι ἀλλάλαις ἴσαι, καὶ ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν γινομένων τετράγωνα, ποτὶ μὲν πάντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ν ξ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς α β τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν α β, ν ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ν υ τετραγώνου. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς α β τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκάστας τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς α β ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ τᾶν α β, φ β περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α φ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει λόγον τό, τε ἀπὸ τᾶς ο δ τετράγωνον, ποτί τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ο δ, δ χ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς χ ο τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τᾶς π ζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν π ζ, ψ ζ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ψ π τετραγώνου, ἀπὸ τᾶν ἄλλαν τετράγωνα, ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία. καὶ



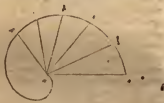
τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ξ, ποτὶ τὰ πάντα περιεχόμενα ὑπό τε τᾶς υ ξ καὶ τὰς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς. καὶ τὰ τριτημόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α β τετράγωνον ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ τᾶν α β, φ β περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ φ α τετραγώνου. εἰ οὖν κα δειχθῇ τό, τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς υ ξ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ξ, καὶ τὰ τρίτα μέρη τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ἐλάσσονα, τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν. ἐστὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ν ξ, καὶ τὰς ἴσας πάσαις ταῖς ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ν. καὶ τὰ τρίτα μέρη τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶν ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, ἴσον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, ϛ μ, ν ξ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ν ξ. καὶ ἴσας πάσαις ταῖς ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν. καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν. τὰ δὲ ἀπὸ τᾶν α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τᾶν β φ, χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, ϛ μ τετραγώνοις, καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς β φ, καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. κοινὰ μὲν οὖν ἐστὶν ἑκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ ν ξ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ν ξ, καὶ τᾶς ἴσας ταῖς ο χ, π ψ, ω ρ, λ σ, ϛ τ, υ ν, ἔλασσόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς β φ, καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. διὰ τὸ τὰς μὲν εἰρημένας γραμμὰς ταῖς μὲν γ ο, ε π, η ρ, ι σ, λ τ, υ ν, ἴσας εἶμεν, τᾶν δὲ λοιπᾶν μείζονας. καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἔπανω. ἐλάττονα ἄρα ἐστὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ. λοιπὸν δὲ δείξομεν, ὅτι μείζονα ἐστὶ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ. πάλιν δὴ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ, ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τᾶν γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ν ξ, καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. καὶ ἐστὶ κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ τᾶν χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, μ ϛ, ν ξ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπό τε τᾶς ν ζ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, τοῦ ὑπὸ τᾶς ν ξ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. ἐστὶ δὲ καὶ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν χ ο, ψ π, ω ρ, λ σ, ϛ τ, υ ν, τῶν ἀπὸ τᾶν γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ, μείζονα ἢ τριπλάσια. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ.

Καί

Καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια ἀναγραφῇ ἀπό πασᾶν, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, εἴδεα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας εἴδεος, ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν εἴδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. τὸν αὐτὸν γὰρ ἕξουσι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

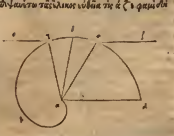
Εἴκα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς, ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσάκις οὖν ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν; ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηται τι σημεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σημεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς, ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς ἀφ᾽ ἇς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. εὐθεῖα ἂν μὲν ἐν τᾷ πρώτᾳ τᾷ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον, τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω. ἂν δὲ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσει, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτον καλείσθω. τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας, δεύτερον καλείσθω. καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω. καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμά, τᾶς εὐθείας ταύτας ἐπὶ τὰ αὐτὰ ᾇ περιφορὰ γίνεται προαγομένα καλείσθω. τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπόμενα. ὁ δὲ γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σημείῳ ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτος καλείσθω. ὁ δὲ γραφεὶς, κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ διπλασίᾳ εὐθείᾳ, δεύτερος καλείσθω. καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν μὲν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, εὐθεῖαι ιβ
ἐμπεσῶντι ὁποσαιοῦν, ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ᾽ ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑπερέχοντι ἀλλάλαν. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς αἱ α β, α γ, α δ, α ε, α ζ ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτ᾽ ἀλλάλας. δεικτέον ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἁ α γ τᾶς α β, καὶ ἁ α δ τᾶς α γ, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως. ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπὸ τᾶς α β ἐπὶ τὰν α γ ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σημεῖον τὸ ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν ὑπεροχὰν διαπορεύεται, ᾇ ὑπερέχει ἁ γ α τὰν α β. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τᾶς α γ ἐπὶ τὰν α δ, ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ α δ τᾶς α γ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπό τε τᾶς α β ἐπὶ τὰν α γ ἀφικνεῖται, καὶ ἀπὸ τᾶς α γ ἐπὶ τὰν α δ. ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἴσαι ἐντί. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον σημεῖον διαπορεύεται τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ α γ τᾶς α β. καὶ τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ α δ τᾶς α γ. τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἅ τε α γ τᾶς α β, καὶ ἁ α δ τᾶς α γ. καὶ αἱ λοιπαί.



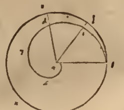
ιγ

Εἴκα εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ, καθ᾽ ἓν μόνον ἐπιψαύσει σημεῖον. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς τὰ α β γ δ. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ α σημεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ α δ εὐθεῖα, καὶ ἐπιψαυέτω τᾶς ἕλικος εὐθεῖά τις ἁ ζ ε. φαμὶ δὴ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον ἐπιψαύειν αὐτᾶς. ἐπιψαυέτω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ δύο σημεῖα τὰ γ, η. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α γ, α η. καὶ ἁ γωνία δίχα τετμήσθω ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν α η, α γ. καθ᾽ ὃ δὲ σημεῖον ἁ δίχα τέμνουσα τὰν γωνίαν τᾷ ἕλικι ποτιπίπτει, ἔστω τὸ θ, τῷ δὴ ἴσῳ ὑπερέχει ἅ τε α η τᾶς α θ, καὶ ἁ α θ τᾶς α γ. ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχουσιν ὑπ᾽ ἀλλάλας. ὥστε διπλασίας ἐντὶ αἱ α η, α γ τᾶς α θ. ἀλλὰ τᾶς ἐν τῷ τριγώνῳ τᾶς α θ δίχα τεμνούσας τὰν γωνίαν, μείζονές ἐντι ἢ διπλασίας. δῆλον οὖν ὅτι καθ᾽ ὃ συμπίπτει (τὸ) σημεῖον τᾷ γ η εὐθείᾳ ἁ α θ, μεταξὺ τῶν θ, α ἐντὶ σημείων, τέμνει ἄρα ἁ ε ζ τὰν ἕλικα, ἐπειδή τι τῶν ἐν τᾷ γ η σημείων ἐν-

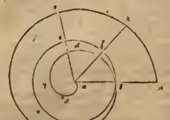


τος δὴ τᾶς ἕλικος, ὑπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα, καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ ε κ τᾶς ἕλικος.

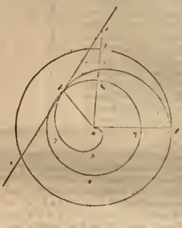
ιδ Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπεσῶντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὰν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος, καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τᾶς περιφερείας γινομένων, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομέναν τᾶν περιφερειᾶν, ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ ε θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ α σημεῖον. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω καὶ κύκλος ὁ θ κ ι, ἔστω ὁ πρῶτος. ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ α σημείου ποτὶ τὰν ἕλικα, αἱ α ε, α δ. καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ ζ, κ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α ε ποτὶ τὰν α δ, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ κ περιφέρειαν. περιαγομένας γὰρ τᾶς α θ γραμμᾶς, δῆλον ὡς τὸ μὲν θ σημεῖον κατὰ τᾶς θ κ κ κύκλου περιφερείας ἐν ἴσῳ γινόμενον ἐστὶν ἰσοταχέως. τὸ δὲ α κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν α θ γραμμὰν πεπορεύεται. καὶ τὸ θ σημεῖον κατὰ τᾶς κύκλου περιφερείας φερόμενον, τὰν θ κ ζ περιφέρειαν. τὸ δὲ α τὰν α ε εὐθεῖαν. καὶ πάλιν τό τε α σημεῖον τὰν α δ γραμμάν. καὶ τὸ θ τὰν θ κ κ περιφέρειαν, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α ε ποτὶ τὰν α δ, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ κ περιφέρειαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ εἴκα ἁ ἑτέρα τᾶν ποτιπιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ποτιπίπτῃ, τὸ αὐτὸ συμβαίνει.



ιε Εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ θ, ἁ μὲν α β γ δ θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θ λ ε μ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ποτιπιπτόντων εὐθεῖαι αἱ α ε, α λ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α λ ποτὶ τὰν α ε, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, πρὸς θ κ κ μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐν ὅσῳ γὰρ χρόνῳ τὸ α σημεῖον κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν α λ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ θ σημεῖον κατὰ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν θ κ ζ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ πάλιν τὸ α σημεῖον τὰν α ε εὐθεῖαν κατὰ τὸ ε, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν θ κ κ, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ αὐτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α λ γραμμὰ ποτὶ τὰν α ε, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν θ κ κ περιφέρειαν, μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπεσῶντι εὐθεῖαι, τὸν αὐτὸν λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν εἰρημέναι μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας δὶς λαμβανομένας. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ τὰς ἄλλας ἕλικας ποτιπίπτουσαι δείκνυνται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν ἁ εἰρημένα περιφέρεια μετὰ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαύτας λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς τᾶν περιφορᾶν, καὶ εἴκα ἁ ποτιπίπτουσα ἁ ἑτέρα ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος πίπτῃ.



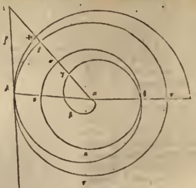
Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σημεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ ταῖν ἐπιζευχθείσαν ἄνισοι ἐσσοῦνται, καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς τὰ α β γ δ θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν α σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ α θ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὅ τε πρῶτος κύκλος, ὁ θ κ ι. ἐπιψαυέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δ ε ζ κατὰ τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἁ δ α. δεικτέον ὅτι ἁ δ ζ ποτὶ ταῖν α δ ἀμβλεῖαν ποιεῖ γωνίαν. γεγράφθω κύκλος ὁ δ τ ν, κέντρον μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ α δ. ἀναγκαῖον δὴ τούτου τοῦ κύκλου τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις περιφέρειαν ἐντὸς πίπτειν τᾶς ἕλικος, ταὶ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός, διὰ τὸ τὰν ἀπὸ τοῦ α ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσας εὐθείας, τᾶς μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις μάζονας εἶμεν τᾶς α δ, τᾶς δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐλάσσονας. ὅτι μὲν οὖν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν α δ ζ, οὐκ ἔστιν ὀξεῖα, δῆλον. ἐπειδὴ μάζων ἐστὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου. ὅτι δὲ ὀρθὰ οὐκ ἔστι, δεικτέον ὧν. ἔστω γὰρ δυνατὸν ὀρθά. ἁ ἄρα ε δ ζ ἐπιψαύει τοῦ δ τ ν κύκλου. δυνατὸν δή ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥς τε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν, ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου



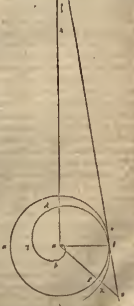
ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς ποτιπιπτούσας περιφερείας, ποτὶ ταὶν δοθεῖσαν περιφέρειαν. ποτιπιπτέτω δὴ ἁ α ι. τέμνει δὴ αὐτὰ ταὶν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ λ. ταὶν δὲ τοῦ δ ν τ περιφέρειαν κύκλου κατὰ τὸ ρ. καὶ ἐχέτω ἁ ρ ι εὐθεῖα ποτὶ ταὶν α ρ ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ ταὶν δ ν τ περιφέρειαν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια ποτὶ ταὶν δ ν τ περιφέρειαν. τουτέστιν, ὃν ἔχει ἁ σ ν κ θ περιφέρεια ποτὶ τὰν κ θ περιφέρειαν. ὃν δὲ ἁ σ ν κ θ περιφέρεια ποτὶ τὰν κ θ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ α λ εὐθεῖα ποτὶ τὰν α δ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ α ι ποτὶ τὰν α ρ, ἤπερ ἁ λ α ποτὶ τὰν α δ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσα γὰρ ἁ ρ α τᾷ α δ. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὰ ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν α δ ζ. δέδεικται δέ, ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα. ἀμβλεῖα ἄρα ἐστίν. ὥς τε ἁ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστίν. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ, τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

Καὶ τοίνυν εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ ἁ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβήσεται. ἐπιψαυέτω γὰρ ἁ ε ζ εὐθεῖα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ὁμοίως δὴ τᾶς τοῦ ρ ν δ περιφερείας κύκλου, τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τᾶς ἕλικος ἐντὸς πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός. ἁ οὖν γωνία, ἁ ὑπὸ ταῖν α δ ζ, οὐκ ἔστιν ὀρθά, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ὀρθά. ἐπιψαύσει δὴ ἁ ε ζ τοῦ ρ ν δ κύκλου κατὰ τὸ δ. ἄχθω δὴ πάλιν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν ἁ α ι. καὶ τεμνέτω τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ χ, τὰν δὲ τοῦ ρ ν δ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ ρ. ἐχέτω δὲ ἁ ρ ι πρὸς ρ α ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ ὅλαν τὰν τοῦ δ ρ ν κύκλου περιφέρειαν, καὶ ποτὶ τὰν δ ν τ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἀλλ᾽ ὃν λόγον ἔχει ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ δ ν τ ρ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ δ ν τ ρ κύκλου περιφερείας, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ σ ν κ θ περιφέρεια, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τᾶς θ σ ν κ, ποτὶ τὰν κ θ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ

θ η κ κύκλου περιφερείας. ὃν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ ὕστερον ἁρμόζουσαι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χ α εὐθεῖα ποτὶ τὰν α δ εὐθεῖαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ζ α ποτὶ τὰν α ρ, ἢ ἁ α χ ποτὶ τὰν α δ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσα μὲν γὰρ ἡ ρ α τᾷ α δ, μείζων δὲ ἡ ζ α τᾶς α χ. δῆλον οὖν ὅτι ἀμβλεῖα ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τᾶν α δ ζ. ὥστε ἡ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστί. τὰ δ' αὐτὰ συμβήσονται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα. καὶ εἴκα ἐπὶ τὸ πέρας αὐτᾶς, ὅτι ἀνίσους ποιεῖ τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἐκ τᾶς ἁφᾶς, ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὀξεῖαν.

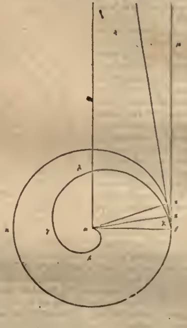


ιη Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ. καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ. ἔστω δὲ τὸ α σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ θ η κ κύκλος ὁ πρῶτος. ἐπιψαυέτω δέ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ θ, ἁ θ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ α ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ θ α, ἁ α ζ. συμπεσεῖται δὴ αὐτᾷ ποτὶ τὰν θ ζ. ἐπεὶ αἱ ζ θ, θ α ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν. συμπιπτέτω κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α ἴσα ἐστὶ τᾷ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείᾳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστίν, ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μείζων. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν τὰν λ α, τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζονα. ἐστὶ δὴ κύκλος τις ὁ θ η κ. καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ θ κ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς κ θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. διότι καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ. δυνατὸν οὖν ἐστιν, ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν α ν. ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ν ρ, πρὸς θ ρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. ἕξει οὖν ἁ ν ρ, ποτὶ τὰν ρ α λόγον, ὃν ἁ θ ρ εὐθεῖα ποτὶ τὰν α λ. ἁ δὲ θ ρ ποτὶ τὰν α λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ ρ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας. ἁ δὲ α λ εὐθεῖα τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζων. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει καὶ ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ὅλα οὖν ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ θ ρ περιφέρεια μετ' ὅλας τᾶς τοῦ κύ-



τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ θ ρ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χ α ποτὶ τὰν α θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἤπερ ἁ χ α ποτὶ τὰν α θ, ὅπερ ἀδύνατον. ἁ μὲν γὰρ ν α μείζων ἐστὶ τᾶς α χ. ἁ δὲ α ρ ἴσα ἐστὶ τᾷ θ α. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζ α τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ θ η κ.

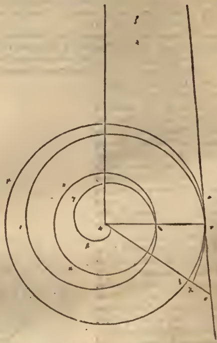
Ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἁ ζ α τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. ἐλάφθω δή τινα εὐθεῖαν πάλιν τὰν α λ, τᾶς μὲν α ζ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας ἐλάσσονα. καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ θ τὰν θ μ παράλληλον τᾷ α ζ. πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ θ η κ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τᾶς διαμέτρου ἁ θ κ. καὶ ἄλλα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ θ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ α θ ποτὶ τὰν α λ, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς κ θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ ἐλάσσων ἐστί. δυνατὸν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ α ἀγαγεῖν τὰν α π ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν. ὥστε τὰν ρ ν τὰν μεταξὺ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας, καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν θ π, ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. τεμεῖ δὴ ἁ α π τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἕξει καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ὃν ἁ θ π πρὸς α λ. ἁ δὲ θ π ποτὶ τὰν α λ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ π εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας, ἁ δὲ α λ ἐλάσσων τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ν ρ ποτὶ τὰν α ρ, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ ρ α ποτὶ τὰν α ν μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ ρ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ ρ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ θ α εὐθεῖα ποτὶ τὰν α χ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. μείζονα ἄρα λόγον



ἔχει ἁ ρ α ποτὶ τὰν α ν, ἢ ἁ α θ ποτὶ τὰν α χ. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστίν, οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ζ α τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. ἴσα ἄρα.

Εἰ δὲ κατὰ τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ εὐθεῖα, ιθ
καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ εὐθεῖα ἁ μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, διπλασία τᾶς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφερείας. ἔστω γὰρ ἁ μὲν α β γ θ ἕλιξ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θ ε τ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ὁ μὲν θ η κ κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τ μ ν ὁ δεύτερος. ἔστω δέ τις γραμμὰ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ τ, ἁ τ ζ. ἁ δὲ ζ α ποτ' ὀρθὰς ἄχθω τᾷ τ α. συμπεσεῖται δὲ τὰ αὐτὰ τᾷ τ ζ, διὰ τὸ δεδεῖχθαι τὰν γωνίαν ὀξεῖαν οὖσαν τὰν ὑπὸ τῶν α τ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α εὐθεῖα διπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶ διπλασία, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία, ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων ἢ διπλασία. καὶ λελάφθω τὶς εὐθεῖα, ἁ λ α τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας μείζων ἢ διπλασία. ἔστι δή τις κύκλος ὁ τ μ ν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γεγραμμένα

ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ τν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ τα ποτὶ τὰν αλ, μείζονα τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς τν ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγομέναν. δυνατὸν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν τὰν ασ, ποτὶ τὰν τν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ρσ ποτὶ τὰν τρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ τα ποτὶ τὰν αλ. τέμνει δὲ ἁ ασ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ρσ ποτὶ τὰν τα, ὃν ἁ τρ ποτὶ τὰν αλ. ἁ δὲ τρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τοῦ μν κύκλου περιφέρειαν. ἐστὶ γὰρ ἁ μὲν τρ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς τρ περιφερείας. ἁ δὲ αλ εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρσ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ὅλα οὖν ἁ σα ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια μετὰ τᾶς τμν κύκλου περιφερείας δὶς εἰρημένας, ποτὶ τὰν τοῦ τμν κύκλου περιφέρειαν δὶς εἰρημέναν. ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι,

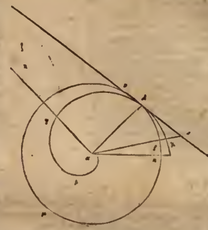


τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χα ποτὶ τὰν ατ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἁ ασ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ χα ποτὶ τὰν τα, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ζα εὐθεῖα τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ διπλασία. δῆλον οὖν, ὅτι διπλασία ἐστί. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον, καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθεῖσα τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς συμπίπτῃ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τᾶς περιφορᾶς λεγομένου τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.

κ Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ ἐπιζευχθείσᾳ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθείσᾳ, συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς τε συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα τᾷ περιφερείᾳ τοῦ γραφέντος κύκλου τᾷ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς τομᾶς, καθ' ὃ τέμνει ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομένας τᾶς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σημείου τοῦ ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδ ἐν τᾷ πρώτᾳ γεγραμμένα, καὶ ἐπιψαυέτω τις αὐτᾶς εὐθεῖα ἁ δε κατὰ τὸ δ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζεύχθω ἁ αδ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ κύκλος γεγράφθω, ὁ δμν. τεμνέτω δὲ οὗτος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸ κ. ἄχθω δὲ ἁ ζα ποτὶ τὰν αδ ὀρθά. ὅτι μὲν οὖν αὐτᾷ συμπίπτει, δῆλον. ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζα εὐθεῖα τᾷ κμνδ περιφερείᾳ, δεικτέον. εἰ γὰρ

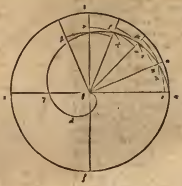
μὴ

μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω εἰ δυνατόν, πρότερον μείζων. λελάφθω δή τις ἁ κα τᾶς μὲν ζα ἐλάσσων, τᾶς δὲ κμν δ περιφερείας μείζων. πάλιν δὴ κύκλος ἐστὶν ὁ κμν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ δν. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ δα πρὸς αλ, μείζων ἐστὶν ἢ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς δν, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιλαβεῖν τὰν αε ποτὶ τὰν νδ ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν ερ ποτὶ τὰν δρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ δα ποτὶ τὰν αλ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. ἑξεῖ οὖν καὶ ἁ ερ ποτὶ τὰν αρ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δρ ποτὶ τὰν αλ. ἁ δὲ αρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κμδ περιφέρειαν. ἐπεὶ ἁ μὲν δρ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς δρ περιφερείας, ἁ δὲ αλ μείζων τᾶς κμδ περιφερείας ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει ἁ ερ εὐθεῖα πρὸς ρα, ἢ ἁ δρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κμδ περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ ξε πρὸς αρ ἐλάσσονα λόγον ἕξει, ἢ ἁ κμρ περιφέρεια πρὸς κμδ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ κμν πρὸς τὰν κμδ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χα πρὸς αδ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἡ εα πρὸς αρ, ἢ ἁ αχ πρὸς δα. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζα τᾶς κμδ περιφερείας. ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστίν. ἴσα ἄρα. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν τρόπων δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ εὐθεῖα μὴ ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν συμπιπτούσας ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐστὶν ὅλᾳ τᾷ τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείᾳ, καὶ ἔτι τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὡσαύτως τᾶς περιφερείας λαμβανομένας. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν γεγραμμένας περιφορᾷ ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα μὴ ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος. τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τῶν εἰρημένων σαμείων πολλαπλασία τίς ἐστι τᾶς τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείας, κατὰ τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν τοῦ καθ' ὃν αἱ περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὁμοίως λαμβανομένας.



Λαμβάνοντι τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γε- κα
γραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ αβγδ ἁ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ θα. ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ζηια. αἱ δὲ αη, ζι διάμετροι αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλάλαις. ἀεὶ δὴ τᾶς ὀρθᾶς γωνίας δίχα τεμνομένας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ τομέως ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ τομεὺς ὁ αθκ ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθέωσαν δὴ οὖν γωνίαι αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς τὰς ἴσας γωνίας τὰς περιεχομένας ὑπὸ τᾶν αθ, θκ. καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας εὐθεῖαι ἔστων ἐπὶ τὰν ἕλικα ἀχθεῖσαι. καθ' ὃ δὴ τέμνει σαμεῖον ἁ θκ τὰν ἕλικα, ἔστω τὸ λ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θλ κύκλος γεγράφθω. πεσεῖται δὴ αὐτοῦ ἁ μὲν εἰς τὰ προαγούμενα περιφέρεια ἐντὸς τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ εἰς τὰ ἑπόμενα ἐκτός. γεγράφθω δὴ ἁ περιφέρεια, καὶ συμπεσεῖται τᾷ ἴσᾳ καὶ συμπίπτουσα τᾷ θα κατὰ τὸ ο, α, ο μ. καὶ τᾷ μετὰ τὰν θκ εὐθείᾳ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσᾳ. πάλιν δὴ καθ' ὃ τέμνει τὰν ἕλικα σημεῖον ἁ θμ, ἔστω τὸ ν. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θν κύκλος γεγράφθω.

γράφθω. ἔσται καὶ συμπίπτει ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου, ἃ τὲ μετὰ τὰν θμ ποτιπίπτουσα ποτὶ τὰν ἕλικα. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν ἄλλων πάντων κατατέμνοντι τὰν ἕλικα, αἳ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ θ, ὧν τ' ἂν συμπίπτει ἑκάστας ἁ περιφέρεια τᾶ τε προαγομένᾳ εὐθείᾳ, καὶ τᾶ ἑπομένᾳ, ἔσται δὴ καὶ περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον περιγεγραμμένον σχῆμα ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστιν, ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος χωρίου, δειχθήσεται. ἐστὶ γὰρ ὁ μὲν θλο τομεὺς ἴσος τῷ θμλ. ὁ δὲ θνπ τῷ θνρ. ὁ δὲ θχσ τῷ θχτ. ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομεῖ, τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τομέων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τομεῖς πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χωρίον σχήματι, χωρὶς τοῦ θακ τομέως. μόνος γὰρ οὗτος λέλειπται τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστι τῷ ακθ τομεῖ, ὅς ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ προτεθέντος.



Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον εἶναι τοῦ χωρίου ἐλάσσονι ἔμμεν παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥστε τὸ χωρίον ὁμοίως μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

κβ Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι δευτέρα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδε, ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ αθ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἁ δὲ εα ἁ δευτέρα εὐθεῖα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ αζη κύκλος ἔστω δεύτερος, καὶ αἱ γη, ζι διάμετροι αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλάλαις. πάλιν οὖν δίχα τεμνομένας τᾶς ὀρθᾶς γωνίας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ θκα τομεύς.



τομεὺς, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθεισᾶν δὴ τᾶν ὀρθᾶν γωνιᾶν εἰς τὰς ἴσας γωνίας, τὰ ὑπὸ τῶν κ θ α καὶ τῶν ἄλλων κατασκευασθέντων ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἐσσεῖται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μεῖζον ἐλάσσονι, ἢ ὁ τομεὺς ὁ θ κ α. μεῖζον γὰρ ἐσσεῖται ἁ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει ὁ θ κ α τομεὺς τοῦ θ ε ρ. δῆλον οὖν ὅτι δυνατόν ἐστι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Διὰ δὴ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερὸν, διότι δυνατόν λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται ἐπίπεδον. ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥς τε τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

ΛΑβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν εὐθειᾶν τὰν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἕλικος ἀγομέναν, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐκ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι. ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ε, πέρατα δὲ αὐτᾶς τὰ α ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ ε. γεγράφθω δὴ κύκλος, κέντρον μὲν τὸ θ, διάστημα δὲ τῶν θ α. καὶ συμπιπτέτω ἁ θ ε ἐπὶ τὸ ζ. ἀεὶ δὲ τᾶς γωνίας τᾶς ποτὶ τὸ θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ θ α δίχα τεμνομένων ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος ἔλασσον. ἔστω ἐλάσσων ὁ τομεὺς ὁ θ α κ προτεθέντος. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν σημείων κατὰ τέμνοντι τὰν ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτὶ τὰ θ. ὥστε τὰν περιφέρειαν ἑκάστα συμπίπτειν τᾶ τε προαγομένα καὶ τᾶ ἑπομένα. ἐσσεῖται δὴ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν περιγεγραμμένον σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔλασσον γάρ ἐστιν ὁ θ α κ τομεύς. ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περιγράψαι, ὥς τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. κγ



ΤΟ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τὰν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ε θ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα πρώτα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ α κ ζ η ι κύκλος πρῶτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ἐν ᾧ ς κύκλος. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ προειρημένον χωρίον τῷ ς κύκλῳ. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι μεῖζον ἐστὶν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἔλασσον. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων. ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι τᾶς ὑπεροχᾶς, ἃ ὑπερέχει ὁ ἴσος κύκλος τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δὴ, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α κ, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε ο. δῆλον οὖν τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ εὐθεῖαι πρὸς τὸ θ, ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ἔστ᾽ αὖ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσόντι. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ὧν ἐστι μεῖζον μὲν ἁ θ α, ἐλάσσων δὲ ἁ θ ε. καὶ ἐλαχίστα κδ

ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ἐλάσσονές ἐντι, ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων, τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ αζηι κύκλῳ. οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ἐλάσσων ἄρα ὁ αζηικ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ἢ τριπλάσιος, τοῦ δὲ ξ κύκλου τριπλάσιος. ἐλάσσων ἄρα ὁ ξ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς αβγδεθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ, ἔλασσον τοῦ ξ χωρίου.



Οὐδὲ τοίνυν μεῖζον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἔστι δὴ πάλιν δυνατὸν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς αβγδθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα. ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ξ κύκλου. ἐγγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θρξ, ἐλάσσων δὲ ὁ θε. δῆλον οὖν, τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ξ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τὸ θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ * ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφονται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, μείζονές ἐντι ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ αζηι κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, ἴσοι τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. μείζων ἄρα ὁ αζηι κύκλος, ἢ τριπλάσιος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τοῦ δὲ ξ κύκλου τριπλάσιος. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ξ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ μεῖζον τὸ χωρίον, τὸ ὑπό τε τᾶς αβγδεθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας, τοῦ ξ κύκλου. ἴσον ἄρα ἐστὶ τῷ περιλαφθέντι ὑπὸ τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας.



Χωρίον

Χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κε δευτέρας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον, ὅνπερ ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ ποτὶ τὰ ιβ. ὅς ἐστι ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα. τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ θ ε εὐθεῖα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ πρώτα, ἁ δὲ α ε ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ δευτέρα. ὁ δὲ κύκλος ὁ α ζ η ι ὁ δεύτερος ἔστω. καὶ αἱ α η, ι ζ διάμετροι ποτ' ὀρθὰς ἀλλήλαις. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας ποτὶ τὸν α ζ η ι κύκλον, λόγον ἔχει, ὃν τὰ ἑπτὰ ποτὶ ιβ. ἔστω δή τις κύκλος ὁ ς, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ς κύκλου δυναμένα ἴσα τῷ τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε περιεχομένῳ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου. ἕξει δὴ ὁ ς κύκλος ποτὶ τὸν α η ζ ι, ὡς ἑπτὰ ποτὶ ιβ. διότι καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α ζ η ι κύκλου τοῦτον ἔχει δυνάμει τὸν λόγον. δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ ς κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον γεγράφθαι σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ ς κύκλος τοῦ χωρίου. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α κ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε λ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι ποτὶ τὸ θ ἴσας γωνίας ἕως τὰν ποτὶ τὰν τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειαν πεσόντι. ἐντὶ δὴ τινὲς γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν ἐστὶ μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ θ, ἐπὶ τὰν τοῦ α ζ η ι κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσων ἐουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε ἴσαι καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε περιεχόμενον. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ α ζ η κύκλος, τοῖς δὲ τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς α θ ποτὶ τὰ συναμφότερα. τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θ α, α ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου, τοῦτον ἔχει ὁ α ζ η κύκλος πρὸς τὸν ς κύκλον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ α ζ η ι κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ς κύκλον. ὥστε ἐλάσσων ἐστὶν



ὁ Ε κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. ἔστι δὲ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ Ε κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΘ ἕλικος, καὶ τᾶς ΑΘ εὐθείας.

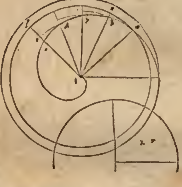
Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς ΑΘ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥς τε τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΘ ἕλικος, καὶ τᾶς ΑΘ εὐθείας, μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ Ε κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν καὶ ἔστω τῶν τομέων, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ ΘΚΡ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ ΘΙΟ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ Ε κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ποιοῦσαι ἴσας γωνίας πρὸς τῷ Θ, ἕως τὰν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. πάλιν δή εἰσί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν μεγίστα μὲν ἁ ΘΑ, ἐλαχίστα δὲ ἁ ΘΙ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαί, αἱ ἀπὸ τοῦ Θ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσους αὐτῶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ὅμοιοι τομέες, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ. οἱ ἄρα τομέες, οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶν ΑΘ, ΘΙ, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τᾶς ΙΑ τετραγώνου. ἐντὶ δὲ τὸ μὲν τοῖς τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶς μεγίστας ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ, τοῖς δὲ ἑτέροις ὁ κύκλος. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὁ ΑΖΚ κύκλος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΑ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΘΑ, ΘΙ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΙ τετραγώνου. τουτέστιν ὁ ΑΖΚ κύκλος πρὸς τὸν Ε κύκλον. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ Ε κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἦν γὰρ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ Ε κύκλος τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς ΑΒΓΔΘ ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας, ὥς τε ἴσος.



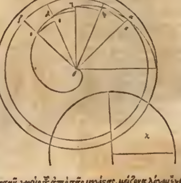
Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ διότι τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ταῖς περιφοραῖς λεγομένας, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ποτὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγόμενον ταῖς περιφοραῖς λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν ἐλάσσονα τὰν περιφορὰν λεγομένου, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τοῦ εἰρημένου ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τοῦ εἰρημένου.

κϛ Τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν, ποτὶ τὸν τομέα τὸν ἔχοντα τὰν μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν τᾷ μείζονι τᾶν ἀπὸ τοῦ πέρατος ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν, τὰν δὲ περιφέρειαν ἅ ἐστι μεταξὺ

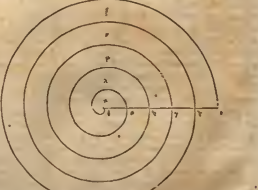
ταξὺ τᾶν εἰρημέναν εὐθειᾶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τᾶ ἕλικι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμέναν, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων τᾶν εἰρημέναν εὐθειᾶν τᾶς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθεισᾶν. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ αβγδε, ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, πέρατα δὲ αὐτᾶς ἔστω τὰ α, ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ σαμεῖον. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θα κύκλος γεγράφθω, καὶ συμπιπτέτω τᾷ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἁ θε κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν αθ, θε ποτὶ τὸν τομέα τὸν αθζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν αθ, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς εζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα. ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ ὁ ξχ, τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν δυνάμει τῷ τε ὑπὸ τᾶν αθ, θε, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς εζ, ποτὶ δὲ τὸ κέντρον αὐτοῦ γωνία ἴσα τᾷ ποτὶ τῷ θ. ὁ δὴ τομεὺς ὁ ξχ ποτὶ τὸν τομέα τὸν θαζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν αθ, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς εζ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θα τετράγωνον. αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυνάμει ποτ' ἀλλάλας. δειχθήσεται δὴ ὁ ξχ τομεὺς ἴσος ὢν τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶν αθ, θε εὐθειᾶν. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων, ἢ ἐλάσσων. ἔστω γὰρ πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν οὖν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον περιγραφῆναι σχῆμα, ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφόμενον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ ξχ τομεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θακ, ἐλάχιστος δὲ ὁ θεδ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ξχ τομέως. διήχθωσαν δὴ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ θ ἐν τᾷ ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ θαζ τομέως πεσοῦντι. ἐντὶ δή τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι. ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταύταν, τῷ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ αθζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς θζ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ πασᾶν. ἀπό τε τᾶν ἴσων ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς θε οὐκ ἀναγέγραπται. τομεῖς οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς θα ποτὶ τὰ συναμφότερα, τά τε ὑπὸ τᾶν αθ, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς εζ τετραγώνου. ἐστὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ θαζ τομεύς. τοῖς δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τὸ περιγεγραμμένον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ θαζ τομεὺς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θα, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ζε. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς θα ποτὶ τὰ εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ θαζ τομεὺς ποτὶ τὸν ξχ τομέα. ὥστε ἔλασσον ἐστὶν ὁ ξχ τομεὺς τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἐστὶ δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ ξχ τομεὺς μείζων τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶν αθ, θε εὐθειᾶν.



οὐδὲ μείων ἐλάσσων. ἔστω γὰρ ἐλάσσων, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. πάλιν δὴ δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥς τε τὸ ἀφαιρούμενον χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ χ τομέως. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μείζων μὲν ὁ θβκ, ἐλάσσων δὲ ὁ θβε. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ γεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ χ τομέως. πάλιν ἐπεί ἐντι τινὲς γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ θαζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, χωρὶς τᾶς θα, τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τῶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει, ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσαι. καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ τᾶς ἑκάστας ὅμοιοι τομεῖς. ἀπὸ δὲ τᾶν μεγίσταν τῶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οὐκ ἀναγέγραπται. οἱ τομεῖς οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας, τοὺς ἀπὸ τᾶν ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θα, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς εζ. ὥστε καὶ ὁ θαζ τομεὺς ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸν χ τομέα. ὥστε μείζων ὁ χ τομεὺς τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δέ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἐστὶν οὖν δὲ ἐλάσσων ὁ χ τομεὺς τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶν αθ, θε εὐθειᾶν. ἴσος ἄρα.



κζ Τῶν χωρίων τῶν περιεχομένων ὑπό τε τᾶν ἑλίκων καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἐν τᾷ περιφορᾷ, τὸ μὲν γ τοῦ β διπλάσιόν ἐστι, τὸ δὲ δ τριπλάσιον, τὸ δὲ ε τετραπλάσιον, καὶ ἀεὶ τὸ ἑπόμενον κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου χωρίου, τὸ δὲ α χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ δευτέρου. ἔστω ἁ ποτικειμένα ἕλιξ ἔν τε τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, καὶ ἐν τᾷ δευτέρᾳ, καὶ ἐν ταῖς ἑπομέναις ὁποσαισοῦν. ἔστω ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σημεῖον, ἁ δὲ θε εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. τῶν δὲ χωρίων ἔστω τὸ μὲν κ τὸ α, τὸ δὲ λ τὸ β, τὸ δὲ μ τὸ γ, τὸ δὲ ν τὸ δ, τὸ δὲ ξ τὸ ε. δεικτέον ὅτι τὸ μὲν κ χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ ἑπομένου, τὸ δὲ μ διπλάσιον τοῦ λ, τὸ δὲ ν τριπλάσιον τοῦ λ, καὶ τῶν ἑξῆς ἀεὶ τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιον τοῦ λ, κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμούς. ὅτι μὲν οὖν τὸ κ ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ λ, ὧδε δείκνυται. ἐπεὶ γὰρ τὸ κλ χωρίον ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ πρὸς τὰ ιβ,



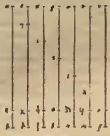
ιβ. ὁ δὲ β κύκλος ποτὶ τὸν α κύκλον, ὡς ιβ ποτὶ τὰ τρία. δῆλον γὰρ δεῖ. ὁ δὲ α κύκλος ποτὶ τὸ κ χωρίον ἔχει ὡς γ πρὸς α. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ κ χωρίον τῷ λ. πάλιν δὲ ἐπὶ τὸ κλμ χωρίον ποτὶ τὸν γ κύκλον, δέδεικται ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ γθ, θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ γθ τετράγωνον. ὁ δὲ γ κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν β κύκλον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς γθ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θβ. ὁ δὲ β κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ κλ χωρίον, ὃν τὸ ἀπὸ βθ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν βθ, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αβ τετραγώνου. ταῦτα δὲ ἔχει λόγον πρὸς ἄλλαλα, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. ὥστε καὶ τὸ κλμ χωρίον ποτὶ τὸ λκ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. αὐτὸ οὖν τὸ μ ποτὶ τὸ κλ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ιβ ποτὶ τὸ ζ. τὸ δὲ κλ ποτὶ τὸ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ τὰ ϛ. δῆλον οὖν ὅτι διπλάσιον ἐστὶ τὸ μ τοῦ λ. ὅτι δὲ τὰ ἑπόμενα τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δειχθήσεται. τὸ γὰρ κλμνξ ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θε, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν εθ, θδ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δε τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θε τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θε, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θδ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θε τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θδ τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἁ δθ, ποτὶ τὸ κλμν χωρίον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θδ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν θδ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ τετραγώνου. καὶ τὸ κλμνξ ἄρα, ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θε, θδ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ. διελόντι, καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχή, ᾇ τε ὑπὸ εθ, θδ μετὰ τοῦ τρίτου μέρεους τοῦ ἀπὸ τᾶς εδ, πρός τε τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ. ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφότερα τοῦ συναμφοτέρου, ᾧ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν εθδ, τοῦ ὑπὸ τῶν δθγ. ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τῶν δθ, γε. τὸ ξ ἄρα ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θδ, γε ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ κλμ χωρίον, λόγον ἔχον τοῦτον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, βδ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ γθ, θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ γβ τετραγώνου. τὸ ν ἄρα ποτὶ τὸ κλμν χωρίον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ θγ, βδ ποτὶ τὸ ὑπὸ θγ, θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ. καὶ ἀνάπαλιν. ταῦτα δὲ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τᾶν δθ, θγ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ξ χωρίον πρὸς τὸ κλμν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θδ, γε ποτὶ τὰ συναμφότερα, τῷ τε ὑπὸ τᾶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. τὰ δὲ κλμν ποτὶ τὸ ν ὄντα συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου ποτὶ τὰ ὑπὸ τᾶν θγ, δβ. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν θδ, γε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, δβ. τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν θδ, γε ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν θγ, δβ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θδ ποτὶ τὰν θγ. ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ γε, βδ. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ θδ ποτὶ τὰν θγ.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ μ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ θγ ποτὶ τὰν θβ. καὶ τὸ μ ποτὶ τὸ λ, ὃν ἁ βθ ποτὶ τὰν αθ. αἱ δὲ εθ, δθ, γθ, βθ, αθ εὐθεῖαι, τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

Εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέντα, μὴ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σημείων ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ ταῖς ἀπὸ τῶν σημείων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς μείζονος τᾶν περιφερειᾶν τᾶς μεταξὺ τᾶν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς ἕλικος τᾶς μεταξὺ τᾶν αὐτᾶν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας, τοῦτον ἕξει τὸν λόγον ποτὶ τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἐλάσσονος περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν, ὃν ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονος κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς αὐτᾶς ὑπεροχᾶς. ἔστω ἕλιξ, ἐφ᾽ ἇς ἁ αβγδ μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ λελάφθω ἐπ᾽ αὐτᾶς δύο σημεῖα τὰ α, γ, ὥστε τὸ θ σημεῖον ἀρχὰν ἦμεν τᾶς ἕλικος. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ ἐπιζευχθέωσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ θ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ ταῖς θα, θγ, κύκλοι γεγράφθωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ θα, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ηα, ποτὶ συναμφότερον τάν τε θα, καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς ηα, τὸ γὰρ χωρίον τὸ νπ ποτὶ τὸν γθ τομέα, δι- κ

δεικτέα

λαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετραγώνω, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου, μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἔστω γὰρ γραμμαὶ ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι ἑξῆς κείμεναι, ἁ μὲν α β τᾶς γ δ, ἁ δὲ γ δ τᾶς ε ζ, ἁ δὲ ε ζ τᾶς η θ, ἁ δὲ η θ τᾶς ι κ, ἁ δὲ ι κ τᾶς λ μ, ἁ δὲ λ μ τᾶς ν ξ. ποτικείσθω δὴ ποτὶ μὲν ταῦ γ δ ἴσα μιᾷ ὑπεροχᾷ ἁ γ ο. ποτὶ δὲ ταῦ ε ζ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς, ἁ ε π. ποτὶ δὲ ταῦ η θ ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἁ η ρ. καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον. ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἀλλάλαις ἴσαι, καὶ ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ. δεικτέον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν ταῦ γενομενᾶν τετράγωνα, ποτὶ μὲν πάντα τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ν ξ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς α β τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ ταῦ α β, ν ξ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ν υ τετραγώνου. ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῦ αὐτᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς α β τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου. ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκάστης ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς α β ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ ταῦ α β, φ β περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α φ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει λόγον τό, τε ἀπὸ τᾶς ο δ τετράγωνον, ποτί τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ ο δ, δ χ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς χ ο τετραγώνου, τὸ ἀπὸ τᾶς π ζ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ταῦ π ζ, ψ ζ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ψ π τετραγώνου, ἀπὸ ταῦ ἄλλων τετράγωνα, ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία. καὶ τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασᾶν ταῦ ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ξ, ποτί τε πάντα περιεχόμενα ὑπό τε τᾶς ν ξ καὶ τὰς ἴσας πάσαις ταῖς ἀρημέναις γραμμαῖς. καὶ τὰ τριτημόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦσι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς α β τετράγωνον ποτὶ συναμφότερα, τό, τε ὑπὸ ταῦ α β, φ β περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ φ α τετραγώνου. εἰ οὖν κα δειχθῇ τό, τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ν ξ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ξ, καὶ τὰ τρίτα μέρη τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ἐλάσσονα. τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, υ ξ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν. ἐστὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ν ξ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ο δ, π ζ, ρ θ, σ κ, τ μ, υ ν. καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, ἴσον τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, ϛ μ, ν ξ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ν ξ. καὶ ἴσας πάσαις ταῖς ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν. καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν. τὰ δὲ ἀπὸ ταῦ α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ ταῦ β φ, χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, ϛ μ τετραγώνοις, καὶ τοῖς ἀπὸ ταῦ α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς β φ, καὶ τᾶς διπλασίας ταῦ α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. κοινὰ μὲν οὖν ἐστὶ ἑκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῦ ἴσαν τᾷ ν ξ. τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ν ξ, καὶ τᾶς ἴσας ταῖς ο χ, π ψ, ω ρ, λ σ, ϛ τ, υ ν, ἔλασσόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς β φ, καὶ τᾶς διπλασίας ταῦ α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμὰς ταῖς μὲν γ ο, ε π, η ρ, ι σ, λ τ, υ ν, ἴσας εἶμεν, ταῦ δὲ λοιπᾶν μείζονας. καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ ταῦ α φ, γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἐπάνω. ἐλάσσονα ἄρα ἐστὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν α β, γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ. λοιπὸν δὲ δείξομεν, ὅτι μείζονά ἐστι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ. πάλιν δὴ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῦ γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ, ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ ταῦ γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ, καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ν ξ, καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν ταῦ γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. καὶ οὖν κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ ταῦ χ δ, ψ ζ, ω θ, λ κ, μ ϛ, ν ξ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπό τε τᾶς ν ζ, καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ο χ, π ψ, ρ ω, σ λ, τ ϛ, υ ν, τοῦ ὑπὸ τᾶς ν ξ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν ταῦ γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ. ἐστὶ δὲ καὶ τετράγωνα τὰ ἀπὸ ταῦ χ ο, ψ π, ω ρ, λ σ, ϛ τ, υ ν, ταῦ ἀπὸ ταῦ γ χ, ε ψ, η ω, ι λ, λ ϛ, μείζονα ἢ τριπλάσια. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ ταῦ γ δ, ε ζ, η θ, ι κ, λ μ, ν ξ.



Καὶ

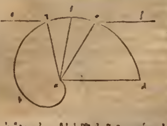
Καὶ τοίνυν εἴκα ὅμοια ἀναγραφῇ ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε ταῦν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ἅ ἐντι τὰ ἀπὸ ταῦν ἴσων ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας εἴδεος, ἐλάσσονα λόγον ἕξοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις, τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν εἴδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου. τὸν αὐτὸν γὰρ ἕξουσι λόγον τὰ ὅμοια εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς, ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσάκις οὖν ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν· ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηται τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς, ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς ἀφ᾽ ἇς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. εὐθεῖα ἂν μὲν ἐν τᾷ πρώτᾳ τᾷ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον, τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω. ἃν δὲ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσῃ, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν. τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτον καλείσθω. τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας, δεύτερον καλείσθω. καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω. καὶ εἴ κα ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμά, τᾶς εὐθείας ταύτας ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἁ περιφορὰ γίνεται, προαγομένα καλείσθω. τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπόμενα, ὅ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ ἅ ἐστι πρώτα, πρῶτος καλείσθω. ὁ δὲ γραφείς, κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ διπλασίᾳ εὐθείᾳ, δεύτερος καλείσθω. καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

Εἴ κα ποτὶ τὰν ἕλικα ταῦν μὲν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, εὐθεῖαι ἐμπίπτωντι ὁποσαιοῦν, ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ᾽ ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑπερέχοντι ἀλλάλαν. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς αἱ αβ, αγ, αδ, αε, αζ, ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτ᾽ ἀλλάλας. δεικτέον ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἁ αγ τᾶς αβ, καὶ ἁ αδ τᾶς αγ, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως. ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπὸ τᾶς αβ ἐπὶ τὰν αγ ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σαμεῖον τὸ ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν ὑπεροχὰν διαπορεύεται, ᾇ ὑπερέχει ἁ γα τὰν αβ. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τᾶς αγ ἐπὶ τὰν αδ, ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ αδ τᾶς αγ. ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπό τε τᾶς αβ ἐπὶ τὰν αγ ἀφικνεῖται, καὶ ἀπὸ τᾶς αγ ἐπὶ τὰν αδ. ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἴσαι ἐντί. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ αγ τᾶς αβ, καὶ τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει ἁ αδ τᾶς αγ. τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἅ τε αγ τᾶς αβ, καὶ ἁ αδ τᾶς αγ. καὶ αἱ λοιπαί. ιβ



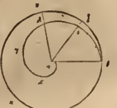
Εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ, καθ᾽ ἓν μόνον ἐπιψαύσει σαμεῖον. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς τὰ α β γ δ. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ α σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ αδ εὐθεῖα, καὶ ἐπιψαυέτω τᾶς ἕλικος εὐθεῖα τις ἁ ζε. φαμὶ δὲ καθ᾽ ἓν μόνον σαμεῖον ἐπιψαύειν αὐτᾶς. ἐπιψαυέτω γὰρ εἰ δυνατὸν κατὰ δύο σαμεῖα τὰ γ, η. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ αγ, αη. καὶ ἁ γωνία δίχα τετμήσθω ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν αη, αγ. καθ᾽ ὃ δὲ σαμεῖον ἁ δίχα τέμνουσα τὰν γωνίαν τᾷ ἕλικι ποτιπίπτει, ἔστω τὸ θ, τῷ δὴ ἴσῳ ὑπερέχει, ἅ τε αη τᾶς αθ, καὶ ἁ αθ τᾶς αγ. ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχουσιν ὑπὸ τ᾽ ἀλλάλας. ὥστε διπλασίας ἐντὶ αἱ αη, αγ τᾶς αθ. ἀλλὰ τᾶς ἐν τῷ τριγώνῳ τᾶς αθ δίχα τεμνούσας τὰν γωνίαν, μείζονες ἐντὶ ἢ διπλασίαι. δῆλον οὖν ὅτι καθ᾽ ὃ συμπίπτει (τὸ) σαμεῖον τᾷ γη εὐθείᾳ ἁ



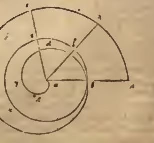
αθ, μεταξύ ἐστι τῶν θ, α σαμείων, τέμνει ἄρα ἁ εζ τὰν ἕλικα, ἐπειδή τι ἐστὶν ἐν τᾷ γη σαμεῖον ἐν- ιγ

τὸς δὲ τᾶς ἕλικος. ὑπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα, καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ ἐκ τᾶς ἕλικος.

ιδ Εἴκα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ποτιπίπτωντι δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ σημείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, καὶ ἐκβληθέωντι ποτὶ τὰν τοῦ πρώτου κύκλου περιφέρειαν, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, αἱ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ περιφέρειαι τοῦ κύκλου αἱ μεταξὺ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος, καὶ τῶν περάτων τᾶν ἐκβληθεισᾶν εὐθειᾶν τῶν ἐπὶ τὰς περιφερείας γινομέναν, ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομέναν τᾶν περιφερειᾶν, ἀπὸ τοῦ πέρατος τᾶς ἕλικος. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ ε θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἀρχὰ δὲ τᾶς μὲν ἕλικος ἔστω τὸ α σημεῖον. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω καὶ κύκλος ὁ θ κ η. ἔστω ὁ πρῶτος. ποτιπιπτόντων δὲ ἀπὸ τοῦ α σημείου ποτὶ τὰν ἕλικα, αἱ α ε, α δ. καὶ ἐκπιπτόντων ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἐπὶ τὰ ζ, η. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α ε ποτὶ τὰν α δ, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν. περιαγομένας γὰρ τᾶς α θ γραμμᾶς, δῆλον ὡς τὸ μὲν θ σημεῖον ἐπὶ τᾶς θ κ η κύκλου περιφερείας φέρεται γεγραμμένον δὲ ἐν ἰσοταχέως. τὸ δὲ α ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν α θ γραμμὰν πεπόρευται. καὶ τὸ θ σημεῖον ἐπὶ τᾶς κύκλου περιφερείας φερόμενον, τὰν θ κ ζ περιφέρειαν. τὸ δὲ α τὰν α ε εὐθεῖαν. καὶ πάλιν τὸ α σημεῖον τὰν α δ γραμμάν. καὶ τὸ θ τὰν θ κ η περιφέρειαν, ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α ε ποτὶ τὰν α δ, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἔξω ἐν τοῖς πρώτοις. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ εἴκα ἁ ἑτέρα τᾶν ποτιπιπτουσᾶν ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ποτιπίπτῃ, τὸ αὐτὸ συμβαίνει.

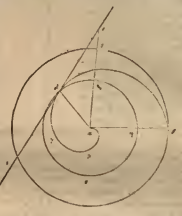


ιε Εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον αἱ εὐθεῖαι ποτ' ἀλλάλας, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας λαμβανομένας. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ θ, ἁ μὲν α β γ δ θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θ λ ε μ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ποτιπιπτόντων εὐθεῖαι αἱ α ε, α λ. δεικτέον ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α λ ποτὶ τὰν α ε, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, πρὸς θ κ η μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐν ᾧ σῳ γὰρ χρόνῳ τὸ α σημεῖον ἐπὶ τᾶς εὐθείας φερόμενον, τὰν α λ γραμμὰν διαπορεύεται, καὶ τὸ θ σημεῖον ἐπὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας φερόμενον, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, καὶ ἔτι τὰν θ κ ζ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ πάλιν τὸ α σημεῖον τὰν α ε εὐθεῖαν ἐπὶ τὸ ε, ὅλαν τε τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. καὶ ἔτι τὰν θ κ η ἑκάτερον ἰσοταχέως αὐτὸ αὐτῷ φερόμενον. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ α λ γραμμὰ ποτὶ τὰν α ε, ὃν ἁ θ κ ζ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν θ κ η περιφέρειαν, μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ εἴκα ποτὶ τὰν ἐν τᾷ τρίτᾳ περιφορᾷ γεγραμμέναν ἕλικα ποτιπίπτωντι εὐθεῖαι, τὸν αὐτὸν λόγον ἑξοῦντι ποτ' ἀλλάλας, ὃν εἰρημέναι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας δὶς λαμβανομένας. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ποτὶ τὰς ἄλλας ἕλικας ποτιπίπτουσαι δείκνυνται, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον, ὃν αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαύτας λαμβανομένας, ὅσος ἐστὶν ὁ ἐλάσσων ἀριθμὸς τᾶν περιφορᾶν, καὶ εἴκα ἁ ποτιπίπτουσα ἁ ἑκατέρα ποτὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος πίπτῃ.



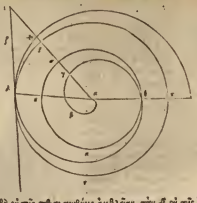
Εἴκα

Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σαμεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἃς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν ἄνισοι ἐσσοῦνται, καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς τὰ α β γ δ θ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ α θ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὁ τε πρῶτος κύκλος, ὁ θ κ η. ἐπιψαυέτω δέ τις εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δ ε ζ κατὰ τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ ἐπὶ τὸ α ἐπεζεύχθω ἁ δ α. δεικτέον ὅτι ἁ δ ζ ποτὶ τὰν α δ ἀμβλεῖαν ποιεῖ γωνίαν. γεγράφθω κύκλος ὁ δ τ ν, κέντρον μὲν τὸ α, διάστημα δὲ τὸ α δ. ἀναγκαῖον δὴ τούτου τοῦ κύκλου τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις περιφέρειαν ἐντὸς πίπτειν τᾶς ἕλικος, τὰν δ᾽ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός, διὰ τὸ τὰν ἀπὸ τοῦ α ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτουσᾶν εὐθειᾶν, τᾶς μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις μείζονας εἶμεν τᾶς α δ, τᾶς δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐλάσσονας. ὅτι μὲν οὖν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν α δ ζ οὐκ ἔστιν ὀξεῖα, δῆλον. ἐπειδὴ μείζων ἐστὶ τᾶς τοῦ ἡμικυκλίου. ὅτι δὲ ὀρθὰ οὐκ ἔστι, δεικτέον οὕτως. ἔστω γὰρ δυνατὸν ὀρθά. ἡ ἄρα ε δ ζ ἐπιψαύει τοῦ δ τ ν κύκλου. δυνατὸν δή ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν εὐθεῖαν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαν, ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐλάσσονα λόγον ἔχειν, τοῦ ὃν ἔχει ἁ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς ποτιπιπτούσας περιφερείας, ποτὶ τὰν δοθεῖσαν περιφέρειαν. ποτιπιπτέτω δὴ ἁ α ι. τέμνει δὴ αὐτὰ τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ λ. τὰν δὲ τοῦ δ ν τ περιφέρειαν κύκλου κατὰ τὸ ρ. καὶ ἐχέτω ἁ ρ ι εὐθεῖα ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν. τουτέστιν, ὃν ἔχει ἁ σ κ θ περιφέρεια ποτὶ τὰν κ θ περιφέρειαν. ὃν δὲ ἁ σ κ θ περιφέρεια ποτὶ τὰν κ θ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ α λ εὐθεῖα ποτὶ τὰν α δ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ α ι ποτὶ τὰν α ρ, ἤπερ ἁ λ α ποτὶ τὰν α δ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσα γὰρ ἁ ρ α τᾷ α δ. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὰ ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν α δ ζ. δέδεικται δέ, ὅτι οὐδὲ ὀξεῖα. ἀμβλεῖα ἄρα ἐστίν. ὥστε ἁ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστίν. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύῃ, τὸ αὐτὸ συμβήσεται.



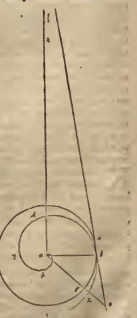
Καὶ τοίνυν εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ ἁ εὐθεῖα, τὸ αὐτὸ συμβήσεται. ἐπιψαυέτω γὰρ ἁ ε ζ εὐθεῖα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ δ, καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον κατασκευάσθω. ὁμοίως δὴ τᾶς τοῦ ρ ν δ περιφερείας κύκλου, τὰ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις τᾶς ἕλικος ἐντὸς πεσοῦνται, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτός. ἁ οὖν γωνία, ἁ ὑπὸ τᾶν α δ ζ, οὐκ ἔστιν ὀρθά, ἀλλὰ ἀμβλεῖα. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ὀρθά. ἐπιψαύσει δὴ ἁ ε ζ τοῦ ρ ν δ κύκλου κατὰ τὸ δ. ἄχθω δὲ πάλιν ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν ἁ α ι. καὶ τεμνέτω τὰν μὲν ἕλικα κατὰ τὸ χ, τὰν δὲ τοῦ ρ ν δ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ ρ. ἐχέτω δὲ ἁ ρ ι πρὸς ρ α ἐλάσσονα λόγον, τοῦ ὃν ἔχει ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ ὅλαν τὰν τοῦ δ ρ ν κύκλου περιφέρειαν, καὶ ποτὶ τὰν δ ν τ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. καὶ ὅλα ἄρα ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἀλλ᾽ ὃν λόγον ἔχει ἁ ρ δ ν τ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ δ ν τ ρ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν δ ν τ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ δ ν τ ρ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ σ κ θ περιφέρεια, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τᾶς θ σ κ, ποτὶ τὰν κ θ περιφέρειαν, μεθ᾽ ὅλας τᾶς τοῦ

θ ο π κ κύκλου περιφερείας. ὃν δὲ λόγον ἔχουσιν αἱ ὕστερον ἀρμέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χα εὐθεῖα ποτὶ τὰν α δ εὐθεῖαν. διὰ [τὰ] αὐτὰ γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ι α ποτὶ τὰν α ρ, ἢ ἁ α χ ποτὶ τὰν α δ, ὅπερ ἀδύνατον. ἴσα μὲν γὰρ ἡ ρ α τᾷ α δ, μείζων δὲ ἡ ι α τᾶς α χ. δῆλον οὖν ὅτι ἀμβλεῖα ἐστὶν ἡ περιεχομένα ὑπὸ τῶν α δ ζ. ὥστε ἡ λοιπὰ ὀξεῖα ἐστί. τὰ δὲ αὐτὰ συμβήσονται, καὶ εἴκα ἁ ἐπιψαύουσα ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιαοῦν γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα. καὶ εἴκα ἐπὶ τὸ πέρας αὐτᾶς, ὅτι ἀνίσους ποιήσει τὰς γωνίας ποτὶ τὰν ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπιζευχθεῖσαν ἐπὶ



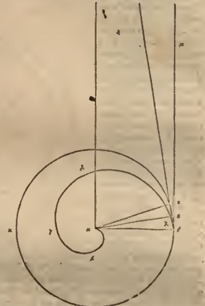
τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖαν, τὰν δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις, ὀξεῖαν.

ιη Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, ἐπὶ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἐν ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ. καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ. ἔστω ἕλιξ ἁ α β γ δ. ἔστω δὲ τὸ α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ θ η κ κύκλος ὁ πρῶτος. ἐπιψαυέτω δέ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ θ, ἁ θ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ α ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ θ α, ἁ α ζ. συμπεσεῖται δὴ αὐτᾷ ποτὶ τὰν θ ζ. ἐπεὶ αἱ ζ θ, θ α ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν. συμπιπτέτω κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α ἴσα ἐστὶ τᾷ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείᾳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν, ἢ ἐλάσσων. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν, μείζων. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν τὰν λ α, τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζονα. ἔστι δὴ κύκλος τις ὁ θ η κ. καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ θ κ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς κ θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. διότι καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ. δυνατὸν οὖν ἐστὶν, ἀπὸ τοῦ α προσβαλεῖν ποτὶ τὰν τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν α ν. ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ν ρ, πρὸς θ ρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. ἑξεῖ οὖν ἁ ν ρ, ποτὶ τὰν ρ α λόγον, ὃν ἁ θ ρ εὐθεῖα ποτὶ τὰν α λ. ἁ δὲ θ ρ ποτὶ τὰν α λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ ρ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας. ἁ δὲ α λ εὐθεῖα τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας μείζων. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει καὶ ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. καὶ ὅλα οὖν ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ θ ρ περιφέρεια μετ' ὅλας τᾶς τοῦ κύ-



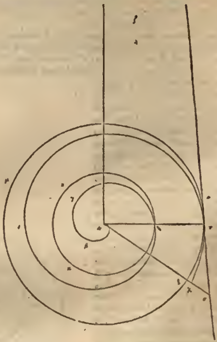
τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ θ ρ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χ α ποτὶ τὰν α θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ν α ποτὶ τὰν α ρ, ἤπερ ἁ χ α ποτὶ τὰν α θ, ὅπερ ἀδύνατον. ἁ μὲν γὰρ ν α μείζων ἐστὶ τᾶς α χ. ἁ δὲ α ρ ἴσα ἐστὶ τᾷ θ α. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζ α τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ θ η κ.

Ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἁ ζ α τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν πάλιν τὰν α λ, τᾶς μὲν α ζ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας ἐλάσσονα· καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ θ τὰν θ μ παράλληλον τᾷ α ζ. πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ θ η κ. καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τᾶς διαμέτρου ἁ θ κ. καὶ ἄλλα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ θ. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ α θ ποτὶ τὰν α λ, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς κ θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θ α πρὸς α ζ, ἐλάσσων ἐστί. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ἀγαγεῖν τὰν α π ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν. ὥστε τὰν ρ ν τὰν μεταξὺ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας, καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν θ π, ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ θ α ποτὶ τὰν α λ. τεμεῖ δὴ ἁ α π τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἕξει καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ν ρ πρὸς ρ α, ὃν ἁ θ π πρὸς α λ. ἁ δὲ θ π ποτὶ τὰν α λ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θ π εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τᾶς θ ρ περιφερείας, ἁ δὲ α λ ἐλάσσων τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ν ρ ποτὶ τὰν α ρ, ἢ ἁ θ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ ρ α ποτὶ τὰν α ν μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ ρ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τοῦ θ η κ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θ κ ρ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ θ α εὐθεῖα ποτὶ τὰν α χ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρ α ποτὶ τὰν α ν, ἢ ἁ α θ ποτὶ τὰν α χ. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστίν, οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ζ α τᾶς τοῦ θ η κ κύκλου περιφερείας. ἴση ἄρα.



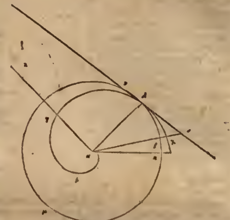
Εἰ δὲ κατὰ τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος κατὰ τὸ πέρας ἐπιψαύει εὐθεῖα, ιθ
καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, συμπεσεῖται αὐτᾷ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ εὐθεῖα ἁ μεταξὺ τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, διπλασία τᾶς τοῦ δευτέρου κύκλου περιφερείας. ἔστω γὰρ ἁ μὲν α β γ θ ἕλιξ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα, ἁ δὲ θ ε τ ἐν τᾷ δευτέρᾳ. καὶ ὁ μὲν θ η κ κύκλος ὁ πρῶτος, ὁ δὲ τ μ ν ὁ δεύτερος. ἔστω δέ τις γραμμὰ ἐπιψαύουσα τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ τ, ἁ τ ζ, ἁ δὲ ζ α ποτ' ὀρθὰς ἄχθω τᾷ τ α. συμπεσεῖται δὲ τὰ αὐτὰ τᾷ τ ζ, διὰ τὸ δεδεῖχθαι τὰν γωνίαν ὀξεῖαν οὖσαν τὰν ὑπὸ τῶν α τ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζ α εὐθεῖα διπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας. εἰ γὰρ μή ἐστι διπλασία, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία, ἢ ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλασία. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατὸν, μείζων ἢ διπλασία. καὶ λελάφθω τις εὐθεῖα, ἁ λ α τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ τοῦ τ μ ν κύκλου περιφερείας μείζων ἢ διπλασία. ἔστι δή τις κύκλος ὁ τ μ ν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γεγραμμένα

ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ τν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ τα ποτὶ τὰν αλ, μείζονα τούτου ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς τν ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγομέναν. δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν τὰν ασ, ποτὶ τὰν τν ἐκβεβλημέναν, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ρσ ποτὶ τὰν τρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ τα ποτὶ τὰν αλ. τέμνει δὲ ἁ ασ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ρσ ποτὶ τὰν τα, ὃν ἁ τρ ποτὶ τὰν αλ. ἁ δὲ τρ ποτὶ τὰν αλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τοῦ μν κύκλου περιφέρειαν. ἐστὶ γὰρ ἁ μὲν τρ εὐθεῖα ἐλάσσων τᾶς τρ περιφερείας. ἁ δὲ αλ εὐθεῖα μείζων ἢ διπλασία τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρσ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ τρ περιφέρεια ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ὅλα οὖν ἁ σα ποτὶ τὰν αρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τρ περιφέρεια μετὰ τᾶς τμν κύκλου περιφερείας δὶς εἰρημένας, ποτὶ τὰν τοῦ τμν κύκλου περιφέρειαν δὶς εἰρημέναν. ὃν δὲ λόγον ἔχοντι αἱ εἰρημέναι περιφέρειαι, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἁ χα ποτὶ τὰν ατ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἁ ασ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ χα ποτὶ τὰν τα, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἢ διπλασία ἁ ζα εὐθεῖα τᾶς τοῦ τμν κύκλου περιφερείας. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ διπλασία. δῆλον οὖν, ὅτι διπλασία ἐστί. διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δεικτέον. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, καὶ ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθεῖσα τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς συμπίπτῃ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, τοῦ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τᾶς περιφορᾶς λεγομένου τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ.



κ Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ ἐπιζευχθείσᾳ κύκλος γραφῇ, ἀπὸ δὲ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἀχθῇ τις ποτ' ὀρθὰς τᾷ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθείσᾳ, συμπεσεῖται αὕτα ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, καὶ ἐσσεῖται ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς τε συμπτώσιος καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα τᾷ περιφερείᾳ τοῦ γραφέντος κύκλου τᾷ μεταξὺ τᾶς ἁφᾶς καὶ τᾶς τομᾶς, καθ' ἃ τέμνει ὁ γραφεὶς κύκλος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὰ προαγούμενα λαμβανομένας τᾶς περιφερείας ἀπὸ τοῦ σαμείου τοῦ ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ ἐν τᾷ πρώτᾳ γεγραμμένα, καὶ ἐπιψαυέτω τις αὐτᾶς εὐθεῖα ἁ δε ζ κατὰ τὸ δ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ ποτὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζεύχθω ἁ α δ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ α δ κύκλος γεγράφθω, ὁ δ μ ν. τεμνέτω δὲ οὗτος τὰν ἀρχὰν τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸ κ. ἄχθω δὲ ἁ ζ α ποτὶ τὰν α δ ὀρθά. ὅτι μὲν οὖν αὐτᾷ συμπίπτει, δῆλον. ὅτι δὲ καὶ ἴσα ἐστὶν ἁ ζ α εὐθεῖα τᾷ κ μν δ περιφερείᾳ, δεικτέον. εἰ γὰρ

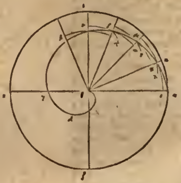
μὴ, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω εἰ δυνατὸν, πρότερον μείζων. λελάφθω δή τις ἁ κ α τᾶς μὲν ζ α εὐθείας ἐλάσσων, τᾶς δὲ κ μ ν δ περιφερείας μείζων. πάλιν δὴ κύκλος ἐστὶν ὁ κ μ ν, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ δ ν. καὶ λόγος ὃν ἔχει ἁ δ α πρὸς α λ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμισέα τᾶς δ ν, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν. δυνατὸν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ α ποτιβαλεῖν τὰν α ε ποτὶ τὰν ν δ ἐκβεβλημέναν. ὥστε τὰν ε ρ ποτὶ τὰν δ ρ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν α λ. δέδεικται γὰρ τοῦτο δυνατὸν ἐόν. ἑξεῖ οὖν καὶ ἁ ε ρ ποτὶ τὰν α ρ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δ ρ ποτὶ τὰν α λ. ἁ δὲ α ρ ποτὶ τὰν α λ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κ μ δ περιφέρειαν. ἐπεὶ ἁ μὲν δ ρ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς δ ρ περιφερείας. ἁ δὲ α λ μείζων τᾶς κ μ δ περιφερείας. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ἁ ε ρ εὐθεῖα πρὸς ρ α, καὶ ἁ δ ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν κ μ δ περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ ε α πρὸς α ρ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ κ μ ρ περιφέρεια πρὸς κ μ δ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ κ μ ρ πρὸς τὰν κ μ δ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ χ α πρὸς α δ. ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ε α πρὸς α ρ, ἢ ἁ α χ πρὸς δ α. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζ α τᾶς κ μ δ περιφερείας. ὁμοίως δὲ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἐστίν. ἴσα ἄρα.



διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ εἴκα τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας ἕλικος ἐπιψαύῃ εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν συμπιπτούσας, καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐστὶν ὅλᾳ τᾷ τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείᾳ, καὶ ἔτι τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὡσαύτως τᾶς περιφερείας λαμβανομένας. καὶ εἴκα τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν γεγραμμένας περιφορᾷ ἕλικος ἐπιψαύῃ τις εὐθεῖα μὴ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος. τὰ δὲ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατασκευασθέωντι, ὅτι ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τῶν εἰρημένων σαμείων πολλαπλασία τίς ἐστι τᾶς τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείας, κατὰ τὸν ἐλάσσονα ἀριθμὸν τοῦ καθ' ὃν αἱ περιφοραὶ λέγονται, καὶ ἔτι ἴσα τᾷ μεταξὺ τῶν εἰρημένων σαμείων ὁμοίως λαμβανομένας.

Λαμβάνοντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ θ σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ θ α. ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ὁ ζ η ι α. αἱ δὲ α η, ζ ι διάμετροι αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀλλάλαις. αἰεὶ δὴ τᾶς ὀρθᾶς γωνίας δίχα τεμνομένας, καὶ τοῦ τομέως τοῦ τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιέχοντος, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ τομέως ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ τομεὺς ὁ α θ κ ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθέωσαν δὴ αἱ τέσσαρες ὀρθαὶ εἰς ἴσας γωνίας τᾷ περιεχομένᾳ ὑπὸ τᾶν α θ, θ κ. καὶ αἱ ποιοῦσαι τὰς γωνίας εὐθεῖαι ἔστων ἐπὶ τὰν ἕλικα ἀχθέωσι. καθ' ὃ δὴ τέμνει σαμεῖον ἁ θ κ τὰν ἕλικα, ἔστω τὸ λ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ λ κύκλος γεγράφθω. πεσεῖται δὴ αὐτοῦ, ἁ μὲν εἰς τὰ προαγούμενα περιφέρεια ἐντὸς τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ εἰς τὰ ἑπόμενα ἐκτός. γεγράφθω δὴ ἁ περιφέρεια, καὶ συμπισεῖται τᾷ ἴσᾳ καὶ συμπίπτει τᾷ θ α κατὰ τὸ ο, α, ο μ. καὶ τᾷ μετὰ τὰν θ κ εὐθείᾳ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπιπτούσᾳ. πάλιν δὴ καθ' ὃ τέμνει τὰν ἕλικα σαμεῖον ἁ θ μ, ἔστω τὸ ν. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ ν κύκλος γεγράφθω. κα

γράφθω. ἐσσεῖται καὶ συμπίπτει ἁ περιφέρεια τοῦ κύκλου, καὶ τὰ μετὰ τὰν θμ ποτιπίπτουσα ποτὶ τὰν ἕλικα. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν ἄλλων πάντων κατατέμνοντι τὰν ἕλικα, αἳ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι κύκλοι γεγράφθωσαν κέντρῳ τῷ θ, ὧν τ᾽ ἂν συμπίπτει ἑκάστας ἁ περιφέρεια τᾶς τε προαγομένας εὐθείας, καὶ τᾶς ἑπομένας. ἐσσεῖται δὴ περὶ τὸ λαφθὲν χωρίον περιγεγραμμένον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. ὅτι δὲ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζόν ἐστιν, ἐλάσσονι τοῦ προτεθέντος χωρίου δειχθήσεται. ἐστὶ γὰρ ὁ μὲν θλ τομεὺς ἴσος τῷ θμλ. ὁ δὲ θνπ τῷ θνρ. ὁ δὲ θχσ τῷ θχτ. ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ἄλλων τομέων ἕκαστος τῶν ἐν τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι, ἴσος τῷ κοινὰν ἔχοντι πλευρὰν τομεῖ, τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι τομέων. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ πάντες οἱ τομεῖς πάντεσσιν ἴσοι ἐσσοῦνται. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ τῷ περιγεγραμμένῳ περὶ τὸ χωρίον σχήματι, χωρὶς τοῦ θακ τομέως. μόνος γὰρ οὗτος λέλειπται τῶν ἐν τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου μεῖζον ἐστὶ τῷ ακθ τομεῖ, ὅς ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ προτεθέντος.



Ἐκ τούτου δὲ φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν. ὥστε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον εἶναι τοῦ χωρίου ἐλάσσονι ἤμεν παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥστε τὸ χωρίον ὁμοίως μεῖζον ἤμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

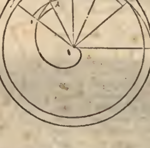
κβ ΛΑβόντες τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἕλικος, τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας ἅ ἐστι δευτέρα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, δυνατόν ἐστι περὶ τὸ αὐτὸ σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον ἤμεν, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ αβγδε, ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ ἔστω τὸ μὲν θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ αθ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ἁ δὲ εα ἁ δευτέρα εὐθεῖα τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ αζκι κύκλος ἔστω δεύτερος, καὶ αἱ γη, ζι διάμετροι αὐτοῦ ποτ᾽ ὀρθὰς ἀλλάλαις. πάλιν οὖν δίχα τεμνομένας τᾶς ὀρθᾶς γωνίας, καὶ τῶν τομέων τῶν τὰν ὀρθὰν γωνίαν περιεχόντων, ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον ἔλασσον τοῦ προτεθέντος. καὶ ἔστω γεγενημένος ὁ θκα τομεύς.



τομεὺς, ἐλάσσων τοῦ προτεθέντος χωρίου. διαιρεθεῖσαν δὴ τὰν ὀρθὰν γωνίαν εἰς τὰς ἴσας γωνίας, τὰ ὑπὸ τῶν κ θ α καὶ τῶν ἄλλων κατασκευασθέντων ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἐσσεῖται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος μεῖζον ἐλάσσονι, ἢ ὁ τομεὺς ὁ θ κ α. μεῖζον γὰρ ἐσσεῖται ἁ ὑπεροχὰ ἃ ὑπερέχει ὁ θ κ α τομεὺς τοῦ θ ι ρ. δῆλον οὖν ὅτι δυνατόν ἐστι καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερόν, διότι δυνατὸν λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται ἐπίπεδον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥστε τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἅ ἐστιν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τὰν εὐθεῖαν τὰν ἀπὸ τῶν περάτων τᾶς ἕλικος ἀγομέναν, δυνατόν ἐστιν περὶ τὸ χωρίον σχῆμα ἐπίπεδον περιγράψαι ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, καὶ ἄλλο ἐγγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ ἐγγραφέντος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἔστω ἕλιξ ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ ε, πέρατα δὲ αὐτᾶς τὰ α ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ ε. γεγράφθω δὴ κύκλος, κέντρον μὲν τὸ θ, διάστημα δὲ ἁ θ α. καὶ συμπιπτέτω τᾷ θ ε ἐπὶ τὸ ζ. ἀεὶ δὲ τᾶς γωνίας τᾶς ποτὶ τὸ θ καὶ τοῦ τομέως τοῦ θ α δίχα τεμνομένων ἐσσεῖται τὸ καταλειπόμενον τοῦ προτεθέντος ἔλασσον. ἔστω ἐλάσσων ὁ τομεὺς ὁ θ α κ τοῦ προτεθέντος. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον γεγράφθωσαν κύκλοι διὰ τῶν σαμείων καθ' ἃ τέμνουσι τὰν ἕλικα αἱ τὰς ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτὶ τὸ θ. ὥστε τὰν περιφέρειαν ἑκάστα συμπίπτειν τᾷ τε προαγομένᾳ καὶ τᾷ ἑπομένᾳ. ἐσσεῖται δὴ περὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν περιγεγραμμένον σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. καὶ ἄλλο ἐγγεγραμμένον. καὶ τὸ περιγεγραμμένον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἐλάσσονι ὑπερέχει τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἐλάσσων γάρ ἐστιν ὁ θ α κ τομεύς. ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι δυνατόν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον ἐπίπεδον, οἷον εἴρηται, περιγράψαι, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. κγ



Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ α β γ δ θ, ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένα. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θ α εὐθεῖα πρώτα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ α κ ζ η ι κύκλος πρῶτος, οὗ τρίτον μέρος ἔστω ὁ ε κύκλος. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ προειρημένον χωρίον τῷ ε κύκλῳ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον εἰ δυνατὸν ἔλασσον. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε θ ἕλικος, καὶ τᾶς α θ εὐθείας περιγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων. ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ὁ ε κύκλος τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ εἰρημένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ α κ, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε ο. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ εὐθεῖαι πρὸς τὸ θ, ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ὧν ἐστι μείζων μὲν ἁ θ α, ἐλάσσων δὲ ἁ θ ε, καὶ ἐλαχίστα κδ

ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι τινὲς γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ κύκλου πεπτώκασι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, ἐλάσσονές ἐντι, ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων, τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν. δέδεικται γὰρ τοῦτο. εἰσὶ δὲ οἱ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ αζηι κύκλῳ. οἱ δὲ τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἴσοι τῷ περιγεγραμμένῳ σχήματι. ἐλάσσων ἄρα ὁ αζηικ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος, ἢ τριπλασίων, τοῦ δὲ ϛ κύκλου τριπλασίων. ἐλάσσων ἄρα ὁ ϛ κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δὲ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς αβγδεθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ, ἔλασσον τοῦ ϛ χωρίου.



Οὐδὲ τοίνυν μεῖζον. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν μεῖζον. ἔστι δὴ πάλιν δυνατὸν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς αβγδθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα, ὥστε τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ εἰρημένον χωρίον τοῦ ϛ κύκλου. ἐγγεγράφθω δὴ, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θρξ, ἐλάσσων δὲ ὁ θε. δῆλον οὖν, τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον ἐστὶ τοῦ ϛ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ θ, ἔστ' ἂν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν πεσόντι. πάλιν οὖν ἐντί τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα πεπτώκασι, τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφονται ἀπὸ πασᾶν ὅμοιοι τομέες, ἀπό τε τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, οἱ ἄρα τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ, μείζονες ἐντὶ ἢ τριπλάσιοι τῶν τομέων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ οἱ μὲν τομέες οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ ἴσοι τῷ αζηι κύκλῳ, οἱ δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας, ἴσοι τῷ ἐγγεγραμμένῳ σχήματι. μείζων ἄρα ὁ αζηι κύκλος, ἢ τριπλασίων τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, τοῦ δὲ ϛ κύκλου τριπλασίων. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ϛ κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστι δὲ, ἀλλὰ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ μεῖζον τὸ χωρίον, τὸ ὑπό τε τᾶς αβγδεθ ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας, τοῦ ϛ κύκλου. ἴσον ἄρα ἐστὶ τῷ περιλαφθέντι ὑπὸ τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶς αθ εὐθείας.



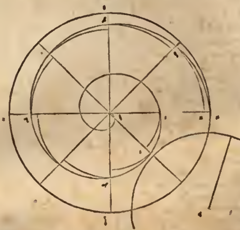
Χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐν δευτέρας τᾶς ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ἑπτὰ ποτὶ τὰ ιβ. ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου, τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α κύκλου, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ β κύκλου. ἔστω δὲ τὸ μὲν θ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ θε εὐθεῖα ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς ἁ πρώτα, ἁ δὲ αε ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ δευτέρα. ὁ δὲ κύκλος ὁ αζηι ὁ δεύτερος ἔστω. καὶ αἱ αη, ιζ διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶς αε εὐθείας ποτὶ τὸν αζηι κύκλον, λόγον ἔχει, ὃν τὰ ἑπτὰ πρὸς ιβ. ἔστω δή τις κύκλος ὁ ς, ἁ δὲ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ς κύκλου δυνάμει ἴσα τῷ τε ὑπὸ ταῦ αθ, θε περιεχομένῳ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. ἕξει δὴ ὁ ς κύκλος πρὸς τὸν αζηι, ὡς ἑπτὰ πρὸς ιβ. διότι καὶ ἁ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ πρὸς τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ αζηι κύκλου τοῦτον ἔχει δυνάμει τὸν λόγον.



Δειχθήσεται οὖν ἴσος ὁ ς κύκλος τῷ περιεχομένῳ χωρίῳ ὑπό τε τᾶς αβγδε ἕλικος, καὶ τᾶς αε εὐθείας. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. ἔστω δὴ πρότερον εἰ δυνατόν, μείζων. δυνατὸν δή ἐστι περὶ τὸ χωρίον γεγράφθαι σχῆμα ἐπίπεδον, ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥστε τὸ περιγραφὲν σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει ὁ ς κύκλος τοῦ χωρίου. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θακ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θολ. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ περιγραφὲν σχῆμα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι ποτὶ τὸ θ ἴσας γωνίας ἔστ' ἂν ποτὶ ταῦ τοῦ δευτέρου κύκλου περιφέρειαν πεσῶντι. ἐντὶ δή τινες γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θα, ἐλαχίστα δὲ ἁ θε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ θ, ἐπὶ τὰν τοῦ αζηι κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσων ἑαυτᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἀλλάλαις τε ἴσαι καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ ταῦ ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀπὸ ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας, ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τᾶς θα ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῦ αθ, θε περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐντὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ ταῦ ἴσαν ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ αζη κύκλος, τοῖς δὲ τομεῦσι τοῖς ἀπὸ ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας ἴσον τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ὁ κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς αθ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῦ αθ, θε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θα, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῦ θα, αε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αε τετραγώνου, τοῦτον ἔχει ὁ αζη κύκλος πρὸς τὸν ς κύκλον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ αζηι κύκλος ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ ποτὶ τὸν ς κύκλον. ὥστε ἐλάσσων ἐστίν

ὁ ς κύκλος τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἐστὶ δὲ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ὁ ς κύκλος τοῦ χωρίου τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας.

Οὐδὲ τοίνυν ἐλάσσων. ἔστω γὰρ εἰ δυνατὸν ἐλάσσων. πάλιν οὖν δυνατόν ἐστιν εἰς τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἕλικος καὶ τᾶς α ε εὐθείας ἐγγράψαι σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ ὁμοίων τομέων συγκείμενον, ὥς τε τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς α ε εὐθείας, μεῖζον ἆμεν τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος ἐλάσσονι, ἢ ᾧ ὑπερέχει τὸ αὐτὸ χωρίον τοῦ ς κύκλου. ἐγγεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, μέγιστος μὲν ὁ θ κ ρ τομεύς, ἐλάχιστος δὲ ὁ θ ε ο. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα μεῖζόν ἐστι τοῦ ς κύκλου. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ποιοῦσαι ἴσας γωνίας πρὸς τὸ θ, ἐς τὰν ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν τετευχοῦσαι. πάλιν οὖν ἐντὶ τινὲς γραμμαὶ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι, ὧν μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι γραμμαὶ αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι, τῷ μὲν πλήθει μία ἐλάσσους αὐτῶν, τῷ δὲ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ. καὶ ἀναγεγράφαται ἀπὸ ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν ὅμοιοι τομέες, καὶ ἀπὸ τᾶν ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ. οἱ ἄρα τομέες, οἱ ἀπὸ ταῦ ἴσαν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπό τε ταῦ α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀπὸ τᾶς ε α τετραγώνου. ἐστὶ δὲ τὸ μὲν τοῖς τομεῦσι τοῖς ἀπὸ ταῦ τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ὑπὸ τᾶς μεγίστας ἴσον τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα ἐν τῷ χωρίῳ, τοῖς δὲ ἑτέροις ὁ κύκλος. μείζονα οὖν λόγον ἔχει ὁ α ζ η κύκλος ποτὶ τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν θ α, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς α ε τετραγώνου. τουτέστιν ὁ α ζ η ι κύκλος πρὸς τὸν ς κύκλον. μείζων ἄρα ἐστὶν ὁ ς κύκλος τοῦ ἐγγεγραμμένου σχήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἦν γὰρ ἐλάσσων. οὐκ ἄρα ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ὁ ς κύκλος τοῦ περιεχομένου χωρίου ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶς εὐθείας, ὥς τε ἴσος.

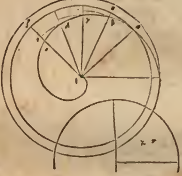


Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται, καὶ διότι τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιᾳοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ταῖς περιφοραῖς λεγομένας, ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ποτὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγόμενον ταῖς περιφοραῖς λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κύκλου, καὶ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὰ μὲν ἐλάσσονα τὰν περιφορὰν λεγομένου, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τοῦ εἰρημένου ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τοῦ εἰρημένου.

κϛ Το περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος, ἃ ἐστὶν ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, οὐκ ἐχούσας πέρας τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ τᾶν εὐθειᾶν ταῦν ἀπὸ τῶν περάτων αὐτᾶς ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν. ποτὶ τὸν τομέα τὸν ἔχοντα τὰν μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαν τᾷ μείζονι τᾶν ἀπὸ τοῦ πέρατος ἐπὶ ταὺν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμενᾶν, τὰν δὲ περιφέρειαν ἃ ἐστὶ μεταξὺ

ταξὺ

ταξὺ ταῖν εἰρημέναιν εὐθειᾶν ὑπὸ τᾶς αὐτᾶς τᾶς ἕλικος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, τό τε περιεχόμενον ὑπὸ ταῖν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἀγμέναν, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μείζων τῶν εἰρημέναν εὐθειᾶν τᾶς ἐλάσσονος, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μείζονος τᾶν ἀπὸ τῶν περάτων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος ἐπιζευχθεισᾶν. ἔστω ἕλιξ ἐφ᾽ ἇς ἁ α β γ δ ε, ἐλάσσων τᾶς ἐν μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένας, πέρατα δὲ αὐτᾶς ἔστω τὰ α, ε. ἔστω δὲ ἀρχὰ τᾶς ἕλικος τὸ θ σαμεῖον. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ α κύκλος γεγράφθω, καὶ συμπιπτέτω τᾷ περιφερείᾳ αὐτοῦ ἁ θ ε κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ ταῖν εὐθειᾶν ταῖν α θ, θ ε ποτὶ τὸν τομέα τὸν α θ ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ ταῖν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α. ἔστω δὴ κύκλος, ἐν ᾧ ὁ χ, τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἔχων ἴσαν δυνάμει τῷ τε ὑπὸ ταῖν α θ, θ ε, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῷ ἀπὸ τᾶς ε ζ, ποτὶ δὲ τὸ κέντρον αὐτοῦ γωνία ἴσα τᾷ ποτὶ τῷ θ. ὁ δὴ τομεὺς ὁ χ ποτὶ τὸν τομέα τὸν θ α ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α τετράγωνον. αἱ γὰρ ἐκ τῶν κέντρων τοῦτον ἔχοντι τὸν λόγον δυνάμει ποτ᾽ ἀλλάλας. δειχθήσεται δὴ ὁ χ τομεὺς ἴσος ὢν τῷ χωρίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν. εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων, ἢ ἐλάσσων. ἔστω γὰρ πρότερον εἰ δυνατὸν μείζων. δυνατὸν οὖν ἐστι περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον περιγράψαι σχῆμα, ἐπίπεδον ἐξ ὁμοίων τομέων συγκείμενον. ὥστε τὸ περιγραφέμενον σχῆμα μεῖζον εἶμεν τοῦ εἰρημένου χωρίου ἐλάσσονι, ἢ ἁλίκῳ ὑπερέχει ὁ χ τομεὺς τοῦ εἰρημένου χωρίου. περιγεγράφθω δή, καὶ ἔστω τῶν τομέων ἐξ ὧν σύγκειται τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, μείζων μὲν ὁ θ α κ, ἐλάσσων δὲ ὁ θ ο δ. δῆλον οὖν ὅτι τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ χ τομέως. διάχθωσαν δὴ εὐθεῖαι αἱ ποιοῦσαι τὰς ἴσας γωνίας ποτὶ τῷ θ ἐν τὰν ποτὶ τὰν περιφέρειαν τοῦ θ α ζ τομέως πεσοῦντι. ἐντὶ δή τινες εὐθεῖαι τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερέχουσαι, αἱ ἀπὸ τοῦ θ ποτὶ τὰν ἕλικα ποτιπίπτουσαι. ὧν ἐστι μεγίστα μὲν ἁ θ α, ἐλαχίστα δὲ ἁ θ ε. ἐντὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες ταύταν, τῷ μεγέθει ἴσαι ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, αἱ ἀπὸ τοῦ ποτὶ ταῖς τοῦ α θ ζ τομέως περιφέρειαν ποτιπίπτουσαι χωρὶς τᾶς θ ζ. καὶ ἀναγεγράφαται ὅμοιοι τομεῖς ἀπὸ πασᾶν. ἀπό τε τᾶν ἴσων ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, καὶ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, ἀπὸ δὲ τᾶς θ ε οὐκ ἀναγέγραπται. τομέες οὖν οἱ ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ποτὶ τοὺς τομέας τοὺς ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας τομέως ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι, ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν α θ, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ε ζ τετραγώνου. ἐστὶ δὲ τοῖς μὲν τομεῦσι τοῖς ἀπὸ τᾶν ἴσαν ἀλλάλαις τε καὶ τᾷ μεγίστᾳ, ἴσος ὁ θ α ζ τομεύς. τοῖς δὲ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλάλαν ὑπερεχουσᾶν, τὸ περιγεγραμμένον. ἐλάσσονα οὖν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα, ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν θ α, θ ε, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ζ ε. ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς θ α ποτὶ τὰ εἰρημένα, τοῦτον τὸν λόγον ἔχει ὁ θ α ζ τομεὺς ποτὶ τὸν χ τομέα. ὥστε ἔλασσον ἐστὶν ὁ χ τομεὺς τοῦ περιγεγραμμένου σχήματος. οὐκ ἔστιν δέ, ἀλλὰ μείζων. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ χ τομεὺς μείζων τοῦ περιεχομένου χωρίου, ὑπό τε τᾶς α β γ δ ε ἕλικος, καὶ τᾶν α θ, θ ε εὐθειᾶν.



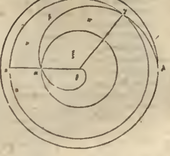
ιβ. ὁ δὲ β κύκλος ποτὶ τὸν α κύκλον, ὡς ιβ ποτὶ τὰ τρία. δῆλον γὰρ δεῖ. ὁ δὲ α κύκλος ποτὶ τὸ κ χωρίον ἔχει ὡς γ πρὸς α. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ κ χωρίον τῷ λ. πάλιν δὲ ἐπεὶ τὸ κλμ χωρίον ποτὶ τὸν γ κύκλον, δέδεικται ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ γθ, θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ γθ τετράγωνον. ὁ δὲ γ κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν β κύκλον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς γθ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θβ. ὁ δὲ β κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ κλ χωρίον, ὃν τὸ ἀπὸ βθ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ τᾶν βθ, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς αβ τετραγώνου. ταῦτα δὲ ἔχει λόγον πρὸς ἄλλαλα, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. ὥστε καὶ τὸ κλμ χωρίον ποτὶ τὸ λκ χωρίον τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ. αὐτὸ οὖν τὸ μ ποτὶ τὸ κλ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ιβ ποτὶ τὸ ζ. τὸ δὲ κλ ποτὶ τὸ λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ τὰ ς. δῆλον οὖν ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ μ τοῦ λ. ὅτι δὲ τὰ ἑπόμενα τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δειχθήσεται. τὸ γὰρ κλμνξ ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θε, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν εθ, θδ περιεχόμενον, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δε τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θε τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θε, ποτὶ τὸν κύκλον οὗ ἐστιν ἐκ τοῦ κέντρου ἁ θδ, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θε τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θδ τετράγωνον. ὁ δὲ κύκλος οὗ ἐστιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἁ δθ, ποτὶ τὸ κλμν χωρίον, τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θδ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῖν θδ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ τετραγώνου. καὶ τὸ κλμνξ ἄρα, ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θε, θδ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δε, ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ. δῆλον ὅτι, καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν ἁ ὑπεροχή, τοῦ τε ὑπὸ εθ, θδ μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τᾶς εδ, πρός τε τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς δγ. ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφότερα τῶν συναμφοτέρων, ᾧ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν εθ, δ, τοῦ ὑπὸ τῶν δθ, γ. ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τῶν δθ, γε. τὸ ξ ἄρα ποτὶ τὸ κλμν λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν θδ, γε ποτὶ τὸ ὑπὸ τῶν δθ, θγ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ κλμ χωρίον, λόγον ἔχον τὸν, ὃν τὸ ὑπὸ ταῖν θγ, βδ ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ γθ, θβ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ γβ τετραγώνου. τὸ ν ἄρα ποτὶ τὸ κλμν χωρίον τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ θγ, βδ ποτὶ τὸ ὑπὸ θγ, θβ. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γβ. καὶ ἀνάπαλιν. ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ ταῖν δθ, θγ, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ξ χωρίον πρὸς τὸ κλμν τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ταῖν θδ, γε ποτὶ τὰ συναμφότερα, τῷ τε ὑπὸ ταῖν δθ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου. τὰ δὲ κλμν ποτὶ τὸ ν ὄντα συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῖν δθ γ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς γδ τετραγώνου ποτὶ τὰ ὑπὸ τὰ θγ, δβ. ἔχει ἄρα καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ταῖν θδ, γε, ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῖν θγ, δβ. τὸ δὲ ὑπὸ ταῖν θδ, γε ποτὶ τὸ ὑπὸ ταῖν θγ, δβ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ θδ ποτὶ ταῖν θγ. ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ γε, βδ. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ τὸ ξ ποτὶ τὸ ν τὸν αὐτὸν ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ θδ ποτὶ ταῖν θγ.

ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶ τὸ ν ποτὶ τὸ μ τὸν αὐτὸν ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἁ θγ ποτὶ τὰν θβ. καὶ τὸ μ ποτὶ τὸ λ, ὃν ἁ βθ ποτὶ τὰν αθ. αἱ δὲ εθ, δθ, γθ, βθ, αθ εὐθεῖαι, τὸν τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

κε Εἴκα ἐπὶ τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένας δύο σημεῖα λαφθέντα, μὴ τὰ πέρατα, ἀπὸ δὲ τῶν λαφθέντων σημείων ἐπιζευχθέωντι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος, καὶ κέντρῳ μὲν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς ἕλικος, διαστήμασι δὲ ταῖς ἀπὸ τῶν σημείων ἐπὶ τὰν ἀρχὰν τᾶς ἕλικος κύκλοι γραφέωντι, τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς μείζονος ταῖν περιφερειᾶν τᾶς μεταξὺ ταῖν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς ἕλικος τᾶς μεταξὺ ταῖν αὐταῖν εὐθειᾶν, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐκβληθείσας, τὸν αὐτὸν ἕξει τὸν λόγον ποτὶ τὸ ἀπολαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἐλάσσονος περιφερείας, καὶ τᾶς αὐτᾶς ἕλικος καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέρατα αὐτᾶν, ὃν ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου μετὰ δύο τριταμορίων τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάσσονος κύκλου πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου μετὰ ἑνὸς τριταμορίου τᾶς αὐτᾶς ὑπεροχᾶς. ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς ἁ αβγδ μιᾷ περιφορᾷ γεγραμμένα. καὶ λελάφθω ἐπ' αὐτᾶς δύο σημεῖα τὰ α, γ, ὥς τε τὸ θ σημεῖον ἀρχὰν εἶμεν τᾶς ἕλικος. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ, ἐπιζευχθέωσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὸ θ. καὶ κέντρῳ τῷ θ, διαστήμασι δὲ ταῖς θα, θγ, κύκλοι γεγράφθωσαν. δεικτέον ὅτι τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ θα, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς ηα, ποτὶ συναμφότερον τάν τε θα, καὶ ἓν τριταμόριον τᾶς ηα, τὸ γὰρ χωρίον τὸ ν π ποτὶ τὸν ηγθ τομέα, δι-

δεικτέον

δεικται ἴσον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει τό τε ὑπὸ ταῦ κθ, αθ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ακ τετραγώνου, ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς κθ τετράγωνον, αὐτὸ ἄρα τὸ ξ ποτὶ τὸ νπ ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ταῦ θα, κ μετὰ τῶν δύο τριταμορίων τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῦ αθ, κ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. καὶ ἐπεὶ τὸ νπξ χωρίον ποτὶ τὸν νξ τομέα ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ τῶν θα, θκ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θκ τετράγωνον. ὁ δὲ νπξ τομεὺς ποτὶ τὸν ν τομέα ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς θκ ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς θα ἕξει καὶ τὸ νπ χωρίον ποτὶ τὸν ν τομέα, τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον τό τε ὑπὸ θα, θκ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ τὸ ἀπὸ θα. τὸ ἄρα νπ χωρίον πρὸς τὸ π τὸν λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῦ κθ α. καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ ταῦ κα, θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου. ἐπεὶ οὖν τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ νπ ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερον, τό τε ὑπὸ θα κ, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου ποτὶ τὰ συναμφότερα, τό τε ὑπὸ ταῦ κθ α, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. τὸ δὲ νπ χωρίον ποτὶ τὸ π ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα τό τε ὑπὸ ταῦ κθ α, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ ταῦ κα θ, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου. ἕξει καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ π, ἴσον τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα τό τε ὑπὸ ταῦ θα, κα, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερον, τό τε ὑπὸ ταῦ θα, κα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα. τὰ δὲ συναμφότερα τό τε ὑπὸ ταῦ θα, κα, καὶ δύο τριταμόρια τοῦ ἀπὸ τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ ταῦ θα, κα καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς κα τετραγώνου, ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερα, ἅ τε θα καὶ δύο τριταμόρια τᾶς κα, ποτὶ συναμφοτέραν, τὰν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς κα. δῆλον οὖν ὅτι καὶ τὸ ξ χωρίον ποτὶ τὸ ν χωρίον ἴσον ἔχει τὸν λόγον, ὃν συναμφότερα, ἅ τε θα, καὶ δύο τριταμόρια τᾶς κα, ποτὶ συναμφότερον τὰν θα, καὶ τὸ τρίτον μέρος τᾶς κα.



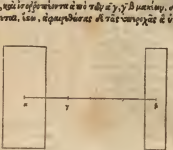
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ, Η ΚΕΝΤΡΑ ΒΑΡΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βαρέα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπεῖν, τὰ δὲ ἴσα βαρέα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. εἴκα βαρέων ἰσορροπεόντων ἀπό τινων μακέων ποτὶ τὸ ἕτερον τῶν βαρέων ποτιτεθῇ μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐκεῖνο ᾧ ποτετέθη. ὁμοίως δὲ καὶ εἴκα ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν βαρέων ἀφαιρεθῇ τι, μὴ ἰσορροπεῖν, ἀλλὰ ῥέπειν ἐπὶ τὸ βάρος ἐφ' οὗ οὐκ ἀφῃρέθη, τῶν ἴσων καὶ ὁμοίων σχημάτων ἐπιπέδων ἐφαρμοζομένων ἐπάλληλα, καὶ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐφαρμόζει ἐπάλληλα. τῶν δὲ ἀνίσων, ὁμοίων δὲ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἔσται κείμενα. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖα κεῖσθαι ποτὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ' ὧν ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ποιοῦντι γωνίας ἴσας ποτὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς. εἴκα μεγέθεα ἀπό τινων μακέων ἰσορροπέωντι, καὶ τὰ ἴσα αὐτοῖς ἀπὸ τῶν αὐτῶν μακέων ἰσορροπήσει, παντὸς σχήματος οὗ ἁ περίμετρος ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλα ᾖ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐντὸς εἶναι δεῖ τοῦ σχήματος. τούτων δὲ ὑποκειμένων, τὰ ἀπὸ ἴσων μακέων ἰσορροπέοντα βαρέα ἴσα ἐστί. εἴπερ γὰρ ἄνισα ἔσονται, ἀφαιρεθείσας ἀπὸ τοῦ μείζονος τᾶς ὑπεροχᾶς, τὰ λοιπὰ οὐκ ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων βαρέα ἰσορροπέοντα, ἴσα ἐστὶ τᾶ ἀπὸ

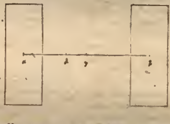
τῶν ἴσων

τῶν ἴσων μακέων ἄνισα βάρεα, οὐκ ἰσορροποῦντι, ἀλλὰ ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἀφαιρεθείσας τᾶς ὑπεροχᾶς ἰσορροπησοῦντι, ἐπειδὴ τὰ ἴσα ἐκ τῶν ἴσων μακέων ἰσορροπέοντι, ποτιτεθέντος οὖν τοῦ ἀφαιρεθέντος ῥέψει ἐπὶ τὸ μεῖζον, ἐπεὶ ἰσορροπεόντων τῷ ἑτέρῳ ποτιτεθέν.

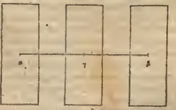
Τὰ ἄνισα βάρεα ἐκ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπησοῦντι καὶ τὸ μεῖζον ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος. ἔστω ἄνισα βάρεα τὰ α, β. καὶ ἔστω μεῖζον τὸ α, καὶ ἰσορροπέοντα ἀπὸ τῶν α γ, γ β μακέων. δεικτέον ὅτι ἐλάσσων ἐστὶν ἁ α γ τᾶς γ β. μὴ γίνεται. ἔστω, ἀφαιρεθείσας δὲ τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει τὸ α τοῦ β. ἐπειδὴ ἰσορροπεόντων ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀφῄρηται, ῥέψει ἐπὶ τὸ β. οὐ ῥέψει δέ. εἴτε γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ γ α τᾶς γ β, ἰσορροπησοῦντι· γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἴσων μακέων. εἴτε μείζων ἁ γ α τᾶς γ β, ῥέψει ἐπὶ τὸ α. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι, ἀλλὰ ῥέπει ἀπὸ τοῦ μείζονος μάκεος. διὰ δὴ ταῦτα, ἐλάσσων ἐστὶν ἁ α γ τᾶς γ β. φανερὸν δὲ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων ἰσορροπέοντα, ἄνισά ἐστι, καὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος. ε



Εἴ κα δύο ἴσα μεγέθεα, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχωντι, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος. ἔστω τοῦ μὲν α κέντρον τοῦ βάρεος τὸ α, τοῦ δὲ β τὸ β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἁ α β τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ γ. λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τὸ γ. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β μεγεθέων κέντρον τοῦ βάρεος τὸ δ, εἰ δυνατόν. ὅτι γὰρ ἐστὶν ἐπὶ τᾶς α β, προδέδεικται. ἐπεὶ οὖν τὸ δ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κατεχομένου τοῦ δ ἰσορροπήσει. τὰ ἄρα α, β μεγέθεα ἰσορροποῦντι ἀπὸ τῶν α δ, δ β μακέων, ὅπερ ἀδύνατον. τὰ γὰρ ἴσα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακέων οὐκ ἰσορροπέοντι. δῆλον οὖν τὸ ὅτι γ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐκ τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος. β



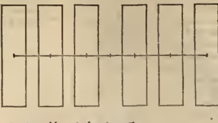
Εἴ κα τριῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἐόντα κείμενα, καὶ τὰ μεγέθεα ἴσον βάρος γ ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἐῶντι, τοῦ ἐκ πάντων μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. ἔστω τρία μεγέθεα τὰ α, β, γ. κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος, τὰ α, β, γ, σαμεῖα ἐπ' εὐθείας κείμενα. ἔστω δὲ τά τε α, β, γ ἴσα, καὶ αἱ α γ, γ β ἴσαι εὐθεῖαι. λέγω ὅτι τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ γ σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τὰ α, β μεγέθεα ἴσον βάρος ἔχει, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον. ἐπειδὴ ἴσαι ἐντὶ αἱ α γ, γ β. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ γ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.



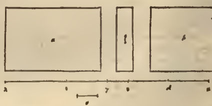
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὁποσῶν καὶ τῷ πλήθει περισσῶν μεγεθέων τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἐπ' εὐθείας ἐῶντι κείμενα, εἴκα τά τε ἴσον ἀπέχοντα, ἀπὸ τοῦ μέσου μεγέθεος

ξ ἴσον

ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων αὐτῶν ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, ὃ καὶ τοῦ μέσου αὐτῶν κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος. αἴκα καὶ ἄρτια ἐόντι τῷ πλήθει τὰ μεγέθεα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας ἔωντι κείμενα, καὶ τὰ μέσα αὐτῶν ἴσον βάρος ἔχωντι, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι ἔωντι, τοῦ ἐκ πάντων τῶν μεγεθέων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος, τὸ μέσον τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μεγεθέων, ὡς ὑπογέγραπται.

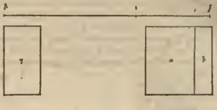


δ Τὰ σύμμετρα μεγέθεα ἰσορροπέοντι ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς βάρεσιν. ἔστω σύμμετρα μεγέθεα τὰ α, β. ὧν κέντρα τὰ α, β. καὶ μᾶκος ἔστω τι τὸ ε δ, καὶ ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως τὸ δ γ μᾶκος πρὸς τὸ γ ε μᾶκος. δεικτέον ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α, β συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α ποτὶ τὸ β, οὕτω τὸ δ γ ποτὶ τὸ γ ε. τὸ δὲ α τῷ β σύμμετρον, καὶ τὸ γ δ ἄρα τῷ γ ε σύμμετρον. τουτέστιν εὐθεῖα τᾷ εὐθείᾳ, ὥστε τῶν ε γ, γ δ ἐστὶ κοινὸν μέτρον. ἔστω δὴ τὸ ν, καὶ κείσθω τᾷ μὲν ε γ ἴσα ἑκατέρα τῶν δ η, δ κ. τᾷ δὲ δ γ ἴσα ἁ ε λ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἁ δ η τᾷ γ ε, ἴσα καὶ ἁ δ γ τᾷ ε η, ὥστε καὶ ἁ λ ε ἴσα τᾷ ε η. διπλασία ἄρα ἁ μὲν λ η τᾶς δ γ, ἁ δὲ η κ τᾶς γ ε. ὥστε τὸ ν καὶ ἑκατέραν τῶν λ η, η κ μετρεῖ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ ἡμίσυ αὐτῶν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ δ γ πρὸς γ ε. ὡς δὲ ἁ δ γ πρὸς γ ε, οὕτως ἁ λ η πρὸς η κ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα τὸ α πρὸς τὸ β, οὕτως ἁ λ η πρὸς η κ. ὁσαπλασίων δέ ἐστιν ἁ λ η τᾶς ν, τοσαυταπλασίων ἔστω τὸ α τοῦ ζ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ λ η πρὸς ν, οὕτως τὸ α πρὸς ζ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἁ κ η πρὸς λ η, οὕτως τὸ β πρὸς α. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν, ὡς ἁ κ η πρὸς ν, οὕτως τὸ β πρὸς ζ. ἰσάκις ἄρα πολλαπλασίων ἐστὶν ἁ κ η τᾶς ν, καὶ τὸ β τοῦ ζ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ζ καὶ τὸ α πολλαπλασίων ὄν, ὥστε τὸ ζ τῶν α, β κοινόν ἐστι μέτρον. διαιρεθείσας οὖν τᾶς μὲν λ η εἰς τὰς τᾷ ν ἴσας, τοῦ δὲ α εἰς τὰ τῷ ζ ἴσα, τὰ ἐν τᾷ λ η τμάματα ἰσομεγέθεα τᾷ ν, ἴσα ἐστὶ τῷ πλήθει τοῖς ἐν τῷ α τμάμασιν ἴσοις οὖσι τῷ ζ. ὥστε αἴκα ἐφ' ἕκαστον τῶν τμαμάτων τῶν ἐν τᾷ λ η ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐντὶ τῷ α. καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον ἔσται τοῦ βάρεος τὸ ε. ἄρτιά τε γάρ ἐστι τὰ πάντα τῷ πλήθει, διὰ τὸ ἴσαν εἶναι τὰν λ ε τᾷ η ε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι κἂν αἴκα ἐφ' ἕκαστον τῶν ἐν τᾷ κ η τμαμάτων ἐπιτεθῇ μέγεθος ἴσον τῷ ζ, κέντρον τοῦ βάρεος ἔχον ἐπὶ τοῦ μέσου τοῦ τμάματος, τά τε πάντα μεγέθεα ἴσα ἐσσεῖται τῷ β, καὶ τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται τὸ δ. ἀλλ' οὖν τὸ μὲν α ἐπικείμενον κατὰ τὸ ε, τὸ δὲ β κατὰ τὸ δ. ἔσται δὲ μεγέθεα ἴσα ἀλλήλοις ἐπ' εὐθείας κείμενα, ὧν τὰ κέντρα τοῦ βάρεος ἴσα ἀπ' ἀλλάλων διεστῶτα συγκείμενα, ἄρτια τῷ πλήθει. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἁ διχοτομία τᾶς εὐθείας τᾶς ἐχούσας τὰ κέντρα τῶν μέσων μεγεθέων. ἐπεὶ δὲ ἴσαι εἰσὶν ἁ μὲν λ ε τᾷ γ δ, ἁ δὲ ε γ τᾷ δ κ, καὶ ὅλα ἄρα ἁ λ γ ἴσα τᾷ γ κ. ὥστε τοῦ ἐκ πάντων μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ σαμεῖον. τοῦ μὲν ἄρα α κειμένου κατὰ τὸ ε, τοῦ δὲ β κατὰ τὸ δ ἰσορροπησοῦντι κατὰ τὸ γ.

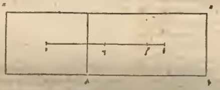


Καὶ

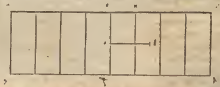
Καὶ τοίνυν εἴκα ἀσύμμετρα ἔωντι τὰ μεγέθεα, ὁμοίως ἰσοῤῥοπησοῦντι, ἀπὸ μακέων ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς μεγέθεσιν. ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθεα τὰ α β, γ μάκεα, τὰ δὲ δ ε, ε ζ. ἐχέτω δὲ τὸ α β ποτὶ τὸ γ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ τὸ ε δ ποτὶ τὸ ε ζ μᾶκος. λέγω ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α β, γ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε. εἰ γὰρ μὴ, ἰσοῤῥοπήσει τὸ α β τεθὲν ἐπὶ τοῦ ζ, τῷ γ τεθέντι ἐπὶ τὸ δ, ἤτοι μεῖζον ἐστὶ τὸ α β τοῦ γ, ὥστε ἰσοῤῥοπεῖν τῷ γ, ἢ οὔ. ἔστω μεῖζον. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ α β ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ μεῖζον ἐστὶ τὸ α β τοῦ γ, ὥστε ἰσοῤῥοπεῖν, ὥστε τὸ λοιπὸν τὸ α σύμμετρον εἶμεν τῷ γ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρά ἐστι τὰ α, γ μεγέθεα, καὶ ἐλάσσονα λόγον ἔχει τὸ α ποτὶ τὸ γ, ἢ ἁ δ ε πρὸς ε ζ, οὐκ ἰσοῤῥοπησοῦντι τὰ α, γ ἀπὸ τῶν δ ε, ε ζ μακέων, τεθέντος τοῦ μὲν α ἐπὶ τὸ ζ, τοῦ δὲ γ ἐπὶ τὸ δ. διὰ ταῦτα δὲ οὐδ' εἰ τὸ γ μεῖζον ἐστὶν, ἢ ὥστε ἰσοῤῥοπεῖν τὸ α. ϛ



Εἴκα ἀπό τινος μεγέθεος μέγεθος ἀφαιρεθῇ, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχον τῷ ὅλῳ, τοῦ λοιποῦ μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐκβληθείσας τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τῶν βαρέων, τοῦ τε ὅλου μεγέθεος καὶ τοῦ ἀφῃρημένου ἐπὶ τὰ αὐτὰ, ἐφ' ὃ τὸ κέντρον τοῦ ὅλου μεγέθεος. καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς ἀπὸ τᾶς ἐκβληθείσας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ εἰρημένα κέντρα, ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον πρὸς τὴν μεταξὺ τῶν κέντρων, ὃν ἔχει τὸ βάρος τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος πρὸς τὸ τοῦ λοιποῦ βάρος, τὸ πέρας τᾶς ἀπολαφθείσας. ἔστω μεγέθεός τινος τοῦ α β κέντρον τοῦ βάρεος τὸ γ. καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ α β τὸ α δ. οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. ἐπιζευχθείσας δὲ τᾶς ε γ, καὶ ἐκβληθείσας, ἀπολελάφθω ἁ γ ζ ποτὶ τὰν γ ε, λόγον ἔχουσα τὸν αὐτὸν, ὃν ἔχει τὸ α δ μέγεθος ποτὶ τὸ δ η. δεικτέον ὅτι τοῦ δ η μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ζ σημεῖον. μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ θ σημεῖον. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν α δ μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε, τοῦ δὲ δ η τὸ θ σημεῖον, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α δ, δ η μεγεθέων, κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ε θ τμαθείσας, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθέμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν λόγον τοῖς μεγέθεσιν, ὥστε οὐκ ἐσσεῖται τὸ γ σαμεῖον ἐπὶ τὰν ἀνάλογον τομὰν τὰ εἰρημένα. οὐκ ἄρα ἐστὶ τὸ γ κέντρον τοῦ ἐκ τῶν α δ, δ η συγκειμένου μεγέθεος, τουτέστι τοῦ α β. ἐστὶ δέ. ὑπέκειτο γάρ. οὐκ ἐστὶ ἄρα τὸ θ κέντρον βάρεος τοῦ δ η μεγέθεος. ε

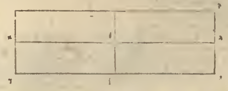


Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας, τὰς κατ' ἐναντίον τοῦ παραλληλογράμμου πλευράς. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ α β γ δ. ἐπὶ δὲ τὰν διχοτομίαν τῶν α β, γ δ ἁ ε ζ. φαμὶ δὴ ὅτι τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς ε ζ. μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ θ, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν α β ἁ θ ι. τᾶς δὲ δὴ ε β διχοτομουμένας αἰεὶ ἐσσεῖταί ποκα καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς ι θ. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν α ε, ε β ἐς τὰς τᾷ ε κ ἴσας. καὶ ἀπὸ τῶν κατὰ τὰς διαιρέσιας σαμείων ἄχθωσαν παρὰ τὰν ε ζ. διαιρεθήσεται δὴ τὸ ὅλον παραλληλόγραμμον ἐς παραλληλόγραμμα τὰ ἴσα καὶ ὅμοια τῷ κ ζ. τῶν οὖν παραλληλογράμμων τῶν ζ

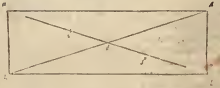


ἴσων καὶ ὁμοίων τῶν κ ζ ἐφαρμοζομένων ἐπάλληλα, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπάλληλα πεσοῦνται. ἐσσοῦνται δὴ μεγέθεα τινὰ παραλληλόγραμμα, ἴσα τῷ κ ζ, ἄρτια τῷ πλήθει. καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπ' εὐθείας κείμενα, καὶ τὰ μέσα ἴσα. καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων, αὐτά τε ἴσα ἐντί, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν κέντρων εὐθεῖαι ἴσαι. τοῦ ἐκ πάντων αὐτῶν ἄρα συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον ἐσσεῖται τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος τῶν μέσων χωρίων. οὐκ ἔστι δέ. τὸ γὰρ θ ἐκτός ἐστι τῶν μέσων παραλληλογράμμων. φανερὸν οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς ε ζ εὐθείας τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου.

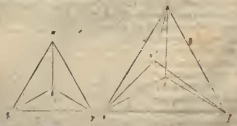
ι Παντὸς παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ αἱ διάμετροι συμπίπτοντι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ α β γ δ, καὶ ἐν αὐτῷ ἁ ε ζ τέμνουσα τὰς α β, γ δ. ἁ δὲ κ λ τὰς α γ, β δ. ἐστὶ δὴ τοῦ α β γ δ παραλληλογράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ε ζ. δέδεικται γὰρ τοῦτο. διὰ ταῦτα δὲ καὶ ἐπὶ τᾶς κ λ. τὸ θ ἄρα σαμεῖον κέντρον τοῦ βάρεος. κατὰ δὲ τὸ θ, αἱ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου πίπτοντι. ὥστε δέδεικται τὸ προτεθέν.



Ἔστι δὲ καὶ ἄλλως τὸ αὐτὸ δεῖξαι. ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ α β γ δ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ δ β. τρίγωνα ἴσα ἐντί, καὶ ὅμοια ἀλλήλοις, ὥστε ἐφαρμοζομένων ἐπάλληλα τῶν τριγώνων, καὶ τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν ἐπάλληλα πεσοῦνται. ἔστω δὴ τοῦ α β δ τριγώνου, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. καὶ τετμάσθω δίχα ἁ δ β κατὰ τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ε θ καὶ ἐκβεβλήσθω. καὶ ἀπειλάφθω ἁ ζ θ ἴσα τᾷ θ ε. ἐφαρμοζομένου δὴ τοῦ α β δ τριγώνου ἐπὶ τὸ β δ γ τρίγωνον, καὶ τεθεμένας τᾶς α β πλευρᾶς ἐπὶ τὰν δ γ, τᾶς δὲ α δ ἐπὶ τὰν β γ. ἐφαρμόζει καὶ ἁ θ ε εὐθεῖα ἐπὶ τὰν ζ θ. καὶ τὸ ε σαμεῖον ἐπὶ τὸ ζ πεσεῖται. ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ α δ γ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν τοῦ μὲν α β δ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον, τοῦ δὲ δ β γ τὸ ζ. δῆλον ὡς τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ μέσον τᾶς ε ζ εὐθείας, ὅπερ ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον.

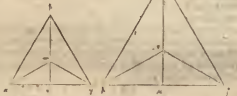


ια Ἐὰν δύο τρίγωνα ὅμοια ἀλλάλοις ᾖ, καὶ ἐν αὐτοῖς σαμεῖα ὁμοίως κείμενα πρὸς τὰ τρίγωνα, καὶ τὸ ἐν σαμεῖον τοῦ ἐν ᾧ ἐστὶ τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος, καὶ τὸ λοιπὸν σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, τοῦ ἐν ᾧ ἐστὶ τριγώνου. ὁμοίως δὲ λέγομεν σαμεῖον κέεσθαι ποτὶ τὰ ὅμοια σχήματα, ἀφ' ὧν αἱ ἐπὶ τὰς ἴσας γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς τὰς ὁμολόγους πλευράς. ἔστω δύο τρίγωνα τὰ α β γ, δ ε ζ. καὶ ἔστω ὡς ἁ α γ πρὸς δ ζ, οὕτως ἅ τε α β πρὸς δ ε, καὶ ἁ β γ πρὸς ε ζ. καὶ ἐν τοῖς εἰρημένοις τριγώνοις σαμεῖα ὁμοίως κείμενα ἔστω τὰ θ, ν πρὸς τὰ α β γ, δ ε ζ τρίγωνα, καὶ ἔστω



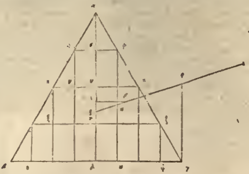
τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ α β γ τριγώνου. λέγω ὅτι καὶ τὸ ν κέντρον βάρεός ἐστι τοῦ δ ε ζ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ η κέντρον βάρεος τοῦ δ ε ζ τριγώνου. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θ α, θ β, θ γ, δ ν, ε ν, ζ ν, δ η, ε η, ζ η. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ α β γ τρίγωνον τῷ δ ε ζ τριγώνῳ, καὶ κέντρα τῶν βαρέων ἐντί, τὰ θ, η σαμεῖα. τῶν δὲ ὁμοίων σχημάτων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως ἐντὶ κείμενα. ὥστε ἴσας ποιεῖσθαι γωνίας πρὸς ταῖς ὁμολόγοις πλευραῖς, ἑκάσταν ἑκάστᾳ. ἴσα ἄρα ἁ ὑπὸ η δ ε γωνία, τᾷ ὑπὸ θ α β. ἀλλὰ ἁ ὑπὸ θ α β γωνία ἴσα ἐντὶ τᾷ ὑπὸ ε δ ν, διὰ τὸ ὁμοίως κεῖσθαι τὰ θ ν σαμεῖα, καὶ ἁ ὑπὸ ε δ η γωνία ἄρα ἴσα ἐστὶ τᾷ ὑπὸ ε δ ν, ἁ μείζων τᾷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἐστὶ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δ ε ζ τριγώνου τὸ ν σαμεῖον. ἐστὶν ἄρα τὸ ν σαμεῖον, ὅπερ.

Εἴκα δύο τρίγωνα ὅμοια ἔωντι, τοῦ δὲ ἑνὸς τριγώνου κέντρον ᾖ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐντὶ ἀ- ι
πό τινος γωνίας ἐπὶ μέσαν βάσιν ἀγομένα, καὶ τοῦ λοιποῦ τριγώνου τὸ κέντρον ἐσσεῖται, τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰς ὁμοίας ἀγομένας γραμμάς. ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ α β γ, δ ε ζ. καὶ ἔστω ὡς ἁ α γ πρὸς δ ζ, οὕτως ἅ τε α β πρὸς δ ε. καὶ ἁ β γ πρὸς ζ ε. καὶ τμαθείσας τᾶς α γ δίχα κατὰ τὸ η, ἐπεζεύχθω ἁ β η, καὶ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ α β γ τριγώνου, ἐπὶ τᾶς β η, τὸ θ. λέγω ὅτι καὶ τοῦ ε δ ζ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ὁμοίως ἀγομένας εὐθείας. τετμάσθω ἁ δ ζ δίχα κατὰ τὸ μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ε μ καὶ γεγονέτω ὡς ἁ β η πρὸς β θ, οὕτως ἁ μ ε πρὸς ε ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α θ, θ γ, δ ν, ν ζ. ἐπεὶ ἐστὶ τᾶς μὲν γ α, ἡμίσεια ἁ α η. τᾶς δὲ δ ζ, ἡμίσεια ἁ δ μ. δῆλον ἄρα καὶ ὡς ἁ β α πρὸς ε δ, οὕτως ἁ α η πρὸς δ μ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογον εἰσί. ἴσα τε ἄρα ἐστὶν ἁ ὑπὸ α η β, τᾷ ὑπὸ δ μ ε. καὶ ἐστὶν ὡς ἁ α η πρὸς δ μ, οὕτως ἁ β η πρὸς ε μ. δῆλον δὲ καὶ ὡς ἁ β η πρὸς β θ, οὕτως ἁ μ ε πρὸς ε ν. καὶ δι' ἴσου ἄρα δῆλον ὡς ἁ α β πρὸς δ ε, οὕτως ἁ β θ πρὸς ε ν. καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογον εἰσί. εἰ δὲ τοῦτο, ἴσα δῆλον ἁ ὑπὸ β α θ γωνία τᾷ ὑπὸ ε δ ν, ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ θ α γ γωνία ἴσα δῆλον τᾷ ὑπὸ ν δ ζ γωνίᾳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἁ μὲν ὑπὸ β γ θ γωνία ἴσα δῆλον τᾷ ὑπὸ ε ζ ν. ἁ δὲ ὑπὸ θ γ η, τᾷ ὑπὸ ν ζ μ ἴσα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ ὑπὸ α β θ τᾷ ὑπὸ δ ε μ ἴσα, ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ ὑπὸ θ β γ γωνία ἴσα δῆλον τᾷ ὑπὸ ν ε ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ πάντα ὁμοίως κεῖται τὰ θ, ν σαμεῖα ποτὶ ὁμολόγους πλευράς, καὶ ἴσας γωνίας ποιεῖ. ἐπεὶ οὖν ὁμοίως κεῖται τὰ θ ν σαμεῖα. καὶ δῆλον τὸ θ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ α β γ τριγώνου, καὶ τὸ ν ἄρα κέντρον βάρεος τοῦ δ ε ζ.



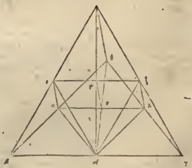
Παντὸς τριγώνου τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν ἐκ τᾶς γωνίας ἐπὶ μέσαν ια
ἀναγομένα τὰν βάσιν. ἔστω τρίγωνον τὸ α β γ. καὶ ἐν αὐτῷ ἁ α δ ἐπὶ μέσαν τὰν β γ βάσιν. δεικτέον ὅτι ἐπὶ τᾶς α δ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ α β γ. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὰν β γ ἄχθω ἁ θ ι, ἁ ἐς δὴ δίχα τεμνομένας τᾶς δ γ ἔσται ἀπόκα ἁ καταλειπομένα ἐλάσσων τᾶς θ ι. καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν β δ, δ γ εἰς τὰς ἴσας. καὶ διὰ τῶν τομῶν παρὰ τὰν α δ ἄχθωσαν καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ζ, η κ, λ μ. ἔσονται δὴ αὗται παρὰ τὰν β γ. τοῦ δὴ παραλληλογράμμου τοῦ μὲν μ ν, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος, ἐπὶ τᾶς υ σ. τοῦ δὲ κ ξ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς τ υ. τοῦ δὲ ζ ο, ἐπὶ τᾶς τ δ. τοῦ ἄρα ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς σ δ εὐθείας. ἔστω δὴ τὸ ρ. καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ρ θ, καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν α δ ἁ γ φ. τὸ δὴ α δ γ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν α μ, μ κ, κ ζ, ζ γ ἀναγεγραμμένα ὅμοια τῷ α δ γ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γ α πρὸς α μ. διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς α μ, μ κ, κ ζ, ζ γ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ α δ β τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ ἀπὸ τῶν α λ, λ η, η ε, ε β ἀναγεγραμμένα ὅμοια τρίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ β α πρὸς α λ. τὸ ἄρα α β γ τρίγωνον ποτὶ πάντα τὰ εἰρημένα τρίγωνα τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ γ α πρὸς α μ. ἀλλὰ ἁ γ α πρὸς α μ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ φ ρ πρὸς ρ θ. ὁ γὰρ τᾶς γ α πρὸς α μ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ ὅλας τᾶς φ ρ πρὸς ρ π, διὰ τὸ ὅμοια εἶναι τὰ τρίγωνα. καὶ τὸ α β γ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὰ εἰρημένα μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φ ρ πρὸς ρ θ ὥς τε

καὶ διελόντι τὰ μν, κξ, ζο παραλληλόγραμμα πρὸς τὰ καταλειπόμενα τρίγωνα, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἁ φθ πρὸς θρ. γεγονέτω οὖν ἐν τῷ τῶν παραλληλογράμμων πρὸς τὰ τρίγωνα λόγῳ ἁ χθ πρὸς θρ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τὸ μέγεθος τὸ αβγ, οὗ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ. καὶ ἀφῄρηται ἀπ' αὐτοῦ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν μν, κξ, ζο παραλληλογράμμων, καὶ ἐστὶ τοῦ ἀφῃρημένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ρ σημεῖον, τοῦ ἄρα λοιποῦ μεγέθεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τριγώνων κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ρθ εὐθείας ἐκβληθείσας, καὶ ἀπολαφθείσας ἐπὶ ταῦ θρ, τὰν ἐχούσας τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὸ ἀφαιρεθὲν μέγεθος ποτὶ τὸ λοιπόν. τὸ ἄρα χ σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων, ὅπερ ἀδύνατον· τᾶς γὰρ διὰ τοῦ χ εὐθείας παρὰ ταῦ αδ ἀγομένας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐπὶ ταῦτα πάντα ἐντί, τουτέστιν ἐπὶ θάτερον μέρος. δῆλον οὖν τὸ προτεθέν.



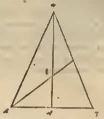
ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ.

Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἄχθω ἁ αδ ἐπὶ μέσαν ταῦ βγ. λέγω ὅτι ἐπὶ τᾶς αδ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου. μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἵ τε αθ, θβ, θγ. καὶ αἱ εδ, ζε ἐπὶ μέσας τὰς βα, αγ. καὶ παρὰ ταῦ αθ ἄχθωσαν αἱ εκ, ζλ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κλ, λδ, δκ, δθ, μν. ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δζγ τριγώνῳ, διὰ τὸ παράλληλον εἶν τὰν βα τᾷ ζδ. καὶ ἐστὶ τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. καὶ τοῦ ζδγ ἄρα τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ λ σημεῖον. ὁμοίως γὰρ ἀντικείμενα τὰ θ, λ σαμεῖα ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων. ἐπειδήπερ ποτὲ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας ποιοῦντι γωνίας. φανερὸν γάρ ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ εβδ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ κ σαμεῖον. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εβδ, ζδγ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ μέσας τᾶς κλ εὐθείας. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τὰ εβδ, ζδγ τρίγωνα. καὶ ἐστὶ τᾶς κλ μέσον τὸ ν. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἁ βε πρὸς εα, οὕτως ἁ βκ πρὸς θκ. ὡς δὲ ἁ γζ πρὸς ζα, οὕτως ἁ γλ πρὸς λθ. εἰ δὲ τοῦτο, ἐστὶν ἁ βγ τᾷ κλ παράλληλος. καὶ ἐπιζεύγνυται ἁ δθ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ βδ πρὸς δγ, οὕτως ἁ κν πρὸς ταῦ νλ. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν εἰρημένων τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον ἐστὶ τὸ ν. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ αεδζ παραλληλογράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ σαμεῖον, ὥστε τοῦ ἐκ πάντων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς μν εὐθείας. ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ αβγ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. ἁ μν ἄρα ἐκβαλλομένα πορεύεται

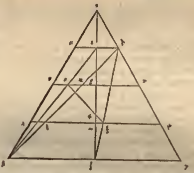


ρεῦνται διὰ τοῦ θ σαμείου, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου, οὐκ ἐστιν ἐπὶ τᾶς αδ εὐθείας. ἐστὶν ἄρα ἐπ' αὐτᾶς.

Παντὸς τριγώνου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ σαμεῖον, καθ' ὃ συμπίπτοντι τοῦ τριγώνου αἱ ἐκ τῶν γωνιῶν ἐπὶ μέσας τὰς πλευρὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι. ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ ἄχθω ἁ μὲν αδ ἐπὶ μέσαν τὰν βγ. ἁ δὲ βε ἐπὶ μέσαν τὰν αγ. ἐσσεῖται δὴ τοῦ αβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐφ' ἑκατέρας τῶν αδ, βε. δέδεικται γὰρ τοῦτο, ὥστε τὸ θ σαμεῖον, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστίν. ιβ

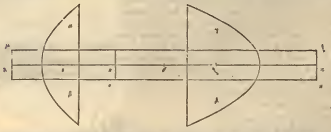


Παντὸς τραπεζίου τὰς δύο πλευρὰς ἔχοντος παραλλήλους ἀλλάλαις, τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰς εὐθείας τὰς ἐπιζευγνυούσας τὰς διχοτομίας τῶν παραλλήλων διαιρεθείσας, ὥστε τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχοντον διχοτομίαν τᾶς ἐλάσσονος τῶν παραλλήλων ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφότερος, ἁ ἴσα τᾶς διπλασίας τᾶς μείζονος μετὰ τᾶς ἐλάσσονος, πρὸς τὰν διπλασίαν τᾶς ἐλάσσονος μετὰ τᾶς μείζονος τῶν παραλλήλων. ἔστω τραπέζιον τὸ αβγδ παραλλήλους ἔχον τὰς αδ, βγ. ἁ δὲ εζ ἐπιζευγνύετω τὰς διχοτομίας τᾶν αδ, βγ. ὅτι οὖν ἐπὶ τᾶς εζ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ τραπεζίου, φανερόν. ἐὰν γὰρ ἐκβάλῃς τὰς γδ η, ζε η, βα η, δῆλον ὅτι ἐπὶ τὸ αὐτὸ σαμεῖον ἔρχονται. ἔσται τὸ τοῦ ηβγ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ηζ. καὶ ὁμοίως τοῦ αηδ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος, ἐπὶ τᾶς εη. καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ αβγδ τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος ἔσται ἐπὶ τᾶς εζ. ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἁ βδ διῃρήσθω εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ κ, θ σαμεῖα, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰν βγ ἄχθωσαν αἱ λθμ, νκτ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δζ, βε, οξ. ἔσται δὴ τοῦ μὲν δβγ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς θμ. ἐπειδήπερ τρίτον μέρος ἁ θβ τᾶς βδ, καὶ διὰ τοῦ θ σαμείου παράλληλος τᾷ βάσει ἆκται ἁ μθ. ἔστι δὲ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ δβγ τριγώνου, καὶ ἐπὶ τᾶς δζ. ὥστε τὸ ξ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εἰρημένου τριγώνου. διὰ ταῦτα δὲ καὶ τὸ ο σαμεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τοῦ αβδ τριγώνου. τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τῶν αβδ, βδγ τριγώνων συγκειμένου μεγέθεος, ὅπερ ἐστὶ τραπέζιον, κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς οξ εὐθείας, ἐστὶ δὲ τοῦ εἰρημένου τραπεζίου κέντρον τοῦ βάρεος καὶ ἐπὶ τᾶς εζ. ὥστε τοῦ αβγδ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ π σαμεῖον. ἔχοι δ' ἂν τὸ βγδ τρίγωνον πρὸς τὸ αβδ λόγον, ὃν ἁ οπ πρὸς πξ. ἀλλ' ὡς τὸ βδγ τρίγωνον πρὸς τὸ αβδ τρίγωνον, οὕτως ἐστὶ ἁ βγ πρὸς αδ. ὡς δὲ ἁ οπ πρὸς πξ, οὕτως ἁ πρ πρὸς πσ. καὶ ὡς ἄρα ἁ βγ πρὸς αδ, οὕτως ἁ ρπ πρὸς πσ. ὥστε καὶ ὡς δύο αἱ βγ μετὰ τᾶς αδ, πρὸς δύο τὰς αδ, μετὰ τᾶς βγ, οὕτως δύο αἱ ρπ μετὰ τᾶς πσ, πρὸς δύο τὰς πσ, μετὰ τᾶς πρ. ἀλλὰ δύο μὲν αἱ ρπ μετὰ τᾶς πσ, συναμφότερος ἐστὶν ἁ σρπ, τουτέστιν ἁ πε. δύο δὲ αἱ πσ μετὰ τᾶς πρ, συναμφότερος ἐστὶν ἁ ρπσ, τουτέστιν ἁ πζ. δέδεικται ἄρα τὰ προτεθέντα. ιγ



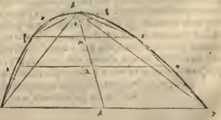
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΚΩΝ Β.

α Εἴκα δύο χωρία περιεχόμενα ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἃ δυνάμεθα παρὰ τὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβαλεῖν, μὴ τὸ αὐτὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἔχοντα, τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων αὐτῶν συγκειμένου μεγέθεος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς εὐθείας τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ κέντρα τοῦ βάρεος αὐτῶν, διαιρέον οὕτως τὰν εἰρημέναν εὐθεῖαν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ἀντιπεπονθότως τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τοῖς χωρίοις. ἔστω δύο χωρία τὰ α β, γ δ, οἷα εἴρηται. κέντρα δὲ αὐτῶν τοῦ βάρεος τὰ ε, ζ σαμεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον τὸ α β ποτὶ τὸ γ δ, τοῦτον ἐχέτω ἁ ζ θ πρὸς θ ε. δεικτέον ὅτι τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α β, γ δ χωρίων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον. ἔστω δὴ τᾷ μὲν ε θ ἑκατέρα ἴσα τῶν ζ η, ζ κ. τᾷ δὲ ζ θ, τουτέστι τᾷ η ε ἴσα ἁ ε λ. ἔσται καὶ ἁ λ θ τᾷ κ θ ἴσα. καὶ



ἔτι ὡς ἁ λ η πρὸς η κ, οὕτως τὸ α β πρὸς γ δ. διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὰν λ κ τὸ σαμεῖον τοῦ α β ἐφ' ἑκάτερα τᾶς λ κ, ὥστε ἂμ μὲν τὸ μ ν ἴσον τῷ α β. ἔσται δὴ τοῦ μ ν κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον. συμπεπληρώσθω δὴ τὸ ν ξ. ἕξει δὲ τὸ μ ν πρὸς τὸ ν ξ λόγον, ὃν ἁ λ η πρὸς η κ. ἔχει δὲ καὶ τὸ α β πρὸς τὸ γ δ, τὸν τᾶς λ η πρὸς η κ λόγον. καὶ ὡς ἄρα τὸ α β πρὸς γ δ, οὕτως τὸ μ ν πρὸς τὸ ν ξ. καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τὸ α β τῷ μ ν. ἴσον ἄρα καὶ τὸ γ δ τῷ ν ξ. καὶ κέντρον ἐστὶν αὐτοῦ τοῦ βάρεος τὸ ζ σαμεῖον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶν ἁ λ θ τᾷ θ κ, καὶ ὅλα ἁ λ κ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς δίχα τέμνει, τοῦ ὅλου τοῦ μ ξ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον, ἀλλὰ τὸ μ ξ ἴσον τῷ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μ ν, ν ξ. καὶ τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α β, γ δ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον.

Εἴκα εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι καὶ ὕψος ἴσον, καὶ πάλιν εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὰς αὐτὰς βάσιας ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ἀεὶ εἰς τὰ καταλειπόμενα τμάματα τρίγωνα ἐγγραφέωντι τὸν αὐτὸν τρόπον, τὸ γενόμενον σχῆμα ἐν τῷ τμάματι γνωρίμως ἐγγράφεσθαι λεγέσθω. φανερὸν δὲ ὅτι τοῦ οὕτως ἐγγραφέντος σχήματος, αἱ τὰς γωνίας ἐπιζευγνύουσαι, τάς τε ἔγγιστα ἀπὸ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος καὶ τὰς ἑξῆς, παρὰ τὰν βάσιν ἐσσοῦνται τοῦ τμάματος, καὶ δίχα τμαθήσονται ὑπὸ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου, καὶ τὰν διάμετρον τεμοῦντι εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς περισσῶν ἀριθμῶν λόγους, ἑνὸς λεγομένου ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος, ἀποδέδεικται ἐν ταῖς τάξεσιν.

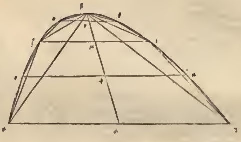


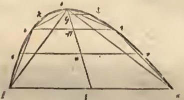
β Εἰ δὲ καὶ εἰς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγραφῇ, τοῦ ἐγγραφέντος κέντρον τοῦ βάρεος ἐσσεῖται ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα τὸ α β γ, οἷον εἴρηται. καὶ

ἐγγρ-

ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ αεζηβθικγ. διάμετρος δὲ τοῦ τμήματος ἔστω ἁ βδ. δεικτέον ὅτι τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ εὐθυγράμμου ἐστὶν ἐπὶ τᾶς βδ. ἐπεὶ γὰρ τοῦ μὲν αεκγ τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς κδ ἐστί, τοῦ δὲ εζικ τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μλ. τοῦ δὲ ζηθι τραπεζίου τὸ κέντρον ἐπὶ τᾶς μν. ἔτι δὲ καὶ τοῦ ηβθ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς βν. δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς βδ ἐστίν.

Εἴκα δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς εἰς ἑκάτερον εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, ἔχωντι δὲ τὰ ἐγγραφέντα εὐθύγραμμα τὰς πλευρὰς ἴσας τῷ πλήθει ἀλλάλαις, τῶν εὐθυγράμμων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ὁμοίως τέμνοντι τὰς διαμέτρους τῶν τμαμάτων. ἔστω δύο τμάματα τὰ αβγ, ξοπ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὰ εὐθύγραμμα γνωρίμως καὶ τὰς πάσας πλευρὰς τὸν ἀριθμὸν ἐχόντων ἀλλήλοις ἴσων. διάμετροι δὲ ἔστωσαν τῶν τμαμάτων αἱ βδ, ορ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εκ, ζι, ηθ. καὶ στ, υφ, χψ. ἐπεὶ οὖν ἅ τε βδ διαιρεῖται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εἰς τοὺς τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν περισσῶν λόγους, καὶ ἁ ορ ὁμοίως καὶ τῷ πλήθει τὰ τμάματα αὐτῶν ἴσα ἐντί, δῆλον ὡς τά τε τμάματα τῶν διαμέτρων τοῖς αὐτοῖς λόγοις ἐσσεῖται. καὶ αἱ παράλληλοι τοὺς αὐτοὺς λόγους ἑξοῦνται. καὶ τῶν τραπεζίων, τουτέστι αε, κγ. καὶ τοῦ ξστπ τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσεῖται ἐπὶ τῶν λδ, ωρ εὐθειῶν ὁμοίως κείμενα, ἐπεὶ τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον αἱ αγ, εκ ταῖς ξπ, στ. πάλιν δὲ καὶ τῶν εζικ, συφτ τραπεζίων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται, ὁμοίως διαιρέοντα τὰς λμ, ωϡ. καὶ ἐν τοῖς ζθ, υψ τραπεζίοις τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐσσοῦνται ὁμοίως διαιρέοντα τὰς μν, ϡϟ. ἔσται δὲ καὶ τῶν ηβθ, χοψ τριγώνων τὰ κέντρα τῶν βαρέων ἐπὶ τῶν βν, οϟ ὁμοίως κείμενα. ἔχωντι δὲ αὐτὸν λόγον τὰ τραπέζια καὶ τὰ τρίγωνα, δῆλον οὖν ὅτι τοῦ ὅλου εὐθυγράμμου τοῦ ἐν τῷ αβγ τμάματι γεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ὁμοίως διαιρεῖ τὴν βδ. καὶ τοῦ ἐν τῷ ξοπ τμάματι ἐγγεγραμμένου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τὰν ορ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

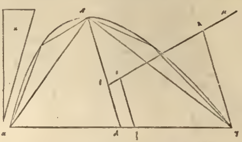




Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς τοῦ τμάματος διαμέτρου. ἔστω τμᾶμα ὡς εἴρηται τὸ αβγ, οὗ διάμετρος ἔστω ἁ βδ. δεικτέον ὅτι τοῦ εἰρημένου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς βδ. εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ ε. καὶ δι' αὐτοῦ ἄχθω παρὰ τὰν βδ ἁ εζ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τμᾶμα τρίγωνον τὸ αβγ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον καὶ ὕψος ἴσον. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ γζ πρὸς δζ, τοῦτον ἐχέτω τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εὐθύγραμμον εἰς τὸ τμᾶμα γνωρίμως, ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶναι τοῦ κ. τοῦ δὲ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου τὸ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστιν ἐπὶ τᾶς βδ. ἔστω τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθω ἁ θε, καὶ ἐκβεβλήσθω. καὶ παρὰ τὰν βδ ἄχθω ἁ γλ. δῆλον δὲ ὅτι μείζονα λόγον ἔχει τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἐν τῷ τμάματι ποτὶ τὰ λειπόμενα τμάματα, ἢ τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ. ἀλλ' ἐστὶν ὡς τὸ αβγ τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, οὕτως ἁ γζ πρὸς ζδ. καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ γζ πρὸς ζδ, τουτέστιν ἁ λε πρὸς εθ. ἐχέτω οὖν ἁ με πρὸς εθ τὸν αὐτὸν λόγον τοῦ ἐγγεγραμ-

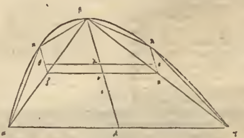
μένου

μένον πρὸς τὰ τμάματα. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ε κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, τοῦ δὲ ἐγγεγραμμένου εὐθυγράμμου τὸ θ, δῆλον ὅτι λοιποῦ τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐκβληθείσας τᾶς θ ε, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας, ἃ λόγον ἔχει ποτὶ τὰν θ ε, ὃν τὸ ἐγγεγραμμένον εὐθύγραμμον πρὸς τὰ



περιλειπόμενα τμάματα. ὥστε κα εἴη τοῦ συγκειμένου μεγέθεος ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ σαμεῖον, ὅπερ ἄτοπον. τὰ γὰρ διὰ τοῦ μ παρὰ τὰν β δ ἀγμένας, ἐπὶ ταῦτα ἐσσοῦνται πάντα τὰ περιλειπόμενα τμάματα. δῆλον οὖν, ὅτι ἐπὶ τᾶς β δ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος.

ι Εἴκα ἐς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, εὐθύγραμμον ἐγγραφῇ γνωρίμως, τὸ τοῦ ὅλου τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐγγύτερον ἐστὶ τᾶς κορυφᾶς τοῦ τμάματος, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον. ἔστω τὸ α β γ τμᾶμα, οἷον εἴρηται. διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἁ δ β. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον πρῶτον γνωρίμως τὸ α β γ, καὶ τετμάσθω ἁ β δ κατὰ τὸ ε. ὥστε εἶμεν διπλασίαν τὰν β ε τᾶς ε δ, ἐστὶν οὖν τοῦ α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε σαμεῖον.

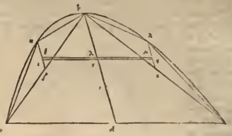


τετμάσθω δὲ δίχα ἑκατέρα τᾶν α β, β γ, κατὰ τὰ ζ, η. καὶ διὰ τᾶν ζ, η παρὰ τὰν β δ ἄχθωσαν αἱ ζ κ, λ η. ἐσσεῖται ἄρα τοῦ μὲν α κ β τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς ζ κ, τοῦ δὲ β γ λ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς η λ. ἔστω δὲ τὰ θ, ι. καὶ ἐπεζεύχθω ἁ θ ι, ζ η. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ θ ζ η ι, καὶ ἴσα ἐστὶ ἁ ζ ν τᾷ ν η, ἐστὶν ἄρα ἁ χ θ ἴσα τᾷ χ ι. ὥστε τοῦ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ μέσας τᾶς θ ι. ἐπειδήπερ ἴσα ἐντὶ τμάματα, τουτέστι τὸ χ σαμεῖον. ἐπεὶ δὲ τοῦ μὲν α β γ τριγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ ε σαμεῖον, τοῦ δὲ συγκειμένου ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β λ γ τὸ χ, δῆλον οὖν ὅτι ὅλου τοῦ τμάματος τοῦ α β γ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς χ ε, τουτέστι μεταξὺ τῶν χ, ε σαμείων, ὥστ᾽ ἂν κα ἐγγύτερον τᾶς τοῦ τμάματος κορυφᾶς τὸ κέντρον τοῦ ὅλου τμάματος, ἢ τοῦ ἐγγραφομένου τριγώνου γνωρίμως.

Ἐγγεγράφθω πάλιν εἰς τὸ τμᾶμα πεντάγωνον εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ α κ β λ γ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος διάμετρος ἁ β δ. ἑκατέρου δὲ τῶν τμαμάτων, ἑκατέρα τῶν κ ζ, λ η διαμέτρων. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ α κ β τμάματι ἐγγέγραπται εὐθύγραμμον γνωρίμως, τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐγγύτερον τᾶς κορυφᾶς, ἢ τὸ τοῦ εὐθυγράμμου. ἔστω οὖν τοῦ μὲν α κ β τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ θ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ι. πάλιν δὲ ἔστω τοῦ μὲν β λ γ τμάματος, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ, τοῦ δὲ τριγώνου τὸ ν. καὶ ἐπεζεύχθω τὰ θ μ, ι ν. ἴσα ἄρα ἐστὶν ἁ θ χ

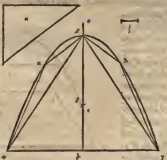
τᾷ χ μ,

τᾶς χ μ, ἁ δὲ ι τ τᾶς τ ν. ἀλλὰ καὶ τριγώνω τῶ α κ β ἴσον ἐστὶ τὸ β λ γ. τμᾶμα δὲ τὸ α κ β τμάματι τῷ β λ γ. δέδεικται γὰρ ἐν ἄλλοις, τὰ τμάματα ἐπίτριτα εἶμεν τῶν τριγώνων. ἔστιν οὖν τοῦ μὲν ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος, κέντρον τοῦ βάρεος τὸ χ. τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τριγώνων τὸ τ. πάλιν οὖν ἐπεὶ τοῦ α β γ κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ ε. τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων, τὸ χ. δῆλον ὡς τοῦ ὅλου τοῦ α β γ τμάματος



τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς χ ε τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ α β γ τρίγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τὰ α κ β, β λ γ τμάματα, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τὸ τμᾶμα αὐτᾶς, τὸ πέρας ἔχον τὸ χ, ποτὶ τὸ ἔλασσον τμᾶμα. τοῦ δὲ α κ β λ γ πενταγώνου κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶν ἐπὶ τᾶς ε τ εὐθείας τμαθείσας οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον τὸ α β γ τρίγωνον ποτὶ τὰ α κ β, β λ γ τρίγωνα, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὸ τμᾶμα αὐτᾶς τὸ πέρας ἔχον τὸ τ ποτὶ τὸ λοιπόν. ἐπεὶ οὖν μείζονα λόγον ἔχει τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς τὰ κ α β, λ β γ τρίγωνα, ἢ ποτὶ τμάματα. δῆλον οὖν ὅτι τοῦ α β γ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος, ἐγγύτερον ἐστὶ τῆς β κορυφῆς, ἢ τὸ τοῦ ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου. καὶ ἐπὶ πάντων εὐθυγράμμων, τῶν ἐγγραφομένων ἐν τὰ τμάματα γνωρίμως ὁ αὐτὸς λόγος.

Τμάματος δοθέντος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, δυνατόν ἐστι τὸ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως ἐγγράψαι, ὥστε τὰν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν κέντρων τοῦ βάρεος τοῦ τμάματος καὶ τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου, ἐλάσσονα εἶμεν πάσας προτεθείσας εὐθείας. δεδόσθω τμᾶμα τὸ α β γ, οἷον εἴρηται. οὗ κέντρον ἔστω τοῦ βάρεος τὸ θ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον γνωρίμως τὸ α β γ. καὶ ἔστω ἁ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἁ ζ. καὶ ὃν λόγον ἔχει ἁ β θ πρὸς ζ, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ α β γ τρίγωνον, πρὸς τὸ κ χωρίον. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸ α β γ τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως τὸ α κ β λ γ. ὥστε τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐλάσσονα εἶμεν τοῦ κ. καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ε. φαμὶ δὴ τὰν θ ε ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς ζ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσα ἐστὶν ἢ μείζων. ἐπεὶ δὲ τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ τὸ α β γ τρίγωνον πρὸς κ, τουτέστιν ἡ θ β πρὸς ζ. ἔχει δὲ καὶ ἁ β θ πρὸς ζ οὐκ ἐλάσσονα λόγον, ἢ ὃν ἔχει πρὸς θ ε. διὰ τὸ μὴ ἐλάσσονα εἶμεν τὰν θ ε τᾶς ζ. πολλῷ ἄρα τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ β θ πρὸς θ ε. ὥστε ἐὰν ποιῶμεν, ὡς τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς περιλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἄλλαν τινὰ πρὸς θ ε, ἔσται μείζων τᾶς β θ. καὶ

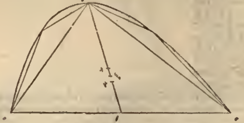


ἔστω ἁ θ κ. ἐπεὶ δὲ τοῦ α β γ τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ θ, εὐθυγράμμου δὲ τοῦ α κ β λ γ τὸ ε, ἐκβληθείσας τᾶς ε θ, καὶ ἀπολαφθείσας τινὸς εὐθείας ἐχούσας λόγον πρὸς τὰν ε θ, ὃν τὸ α κ β λ γ εὐθύγραμμον πρὸς τὰ περιλειπόμενα τμάματα, ἔσται μείζων τᾶς θ β, ἐχέτω οὖν ἁ κ θ πρὸς θ ε

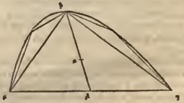
θ ι τὸ κ

τὸ κ ἄρα κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν περιλειπομένων τμαμάτων, ὅπερ ἀδύνατον. πάσας γὰρ διὰ τοῦ κ ἀχθείσας παρὰ ταὶ α γ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἐστὶ τὰν τοῦ τμάματος, δῆλον ὅτι ἁ β ε ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ζ. ἴδια δὲ τοῦτο δεῖξαι.

ζ Δύο τμαμάτων ὁμοίων περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὰ κέντρα τῶν βαρέων εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους. ἔστω δύο τμάματα, οἷα εἴρηται τὰ α β γ, ε ζ η. ὧν διάμετροι αἱ β δ, ζ θ. καὶ ἔστω τοῦ μὲν α β γ τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ κ σαμεῖον, τοῦ δὲ ε ζ η τὸ λ. δεικτέον ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τέμνοντι τὰς διαμέτρους τὰ κ, λ. εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ἁ κ β πρὸς κ δ, οὕτως ἁ ζ μ πρὸς θ μ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸ ε ζ η τμᾶμα εὐθύγραμμον γνωρίμως, ὥστε τὰν μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ τμάματος καὶ τοῦ

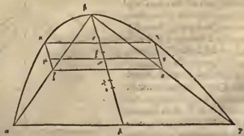


ἐγγραφομένου εὐθυγράμμου ἐλάσσονα εἶμεν τᾶς λ μ. καὶ ἔστω τοῦ ἐγγραφέντος εὐθυγράμμου κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ξ σαμεῖον. ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸ α β γ τμᾶμα τῷ ἐν τῷ ε ζ η ἐγγεγραμμένῳ εὐθυγράμμῳ ὅμοιον εὐθύγραμμον, τουτέστιν ὁμοίως γνωρίμως, οὗ κέντρον τοῦ βάρεος τᾶς κορυφᾶς ἐγγύτερον ἤπερ τοῦ τμάματος, ὅπερ ἀδύνατον. δῆλον οὖν



ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ β κ πρὸς κ δ, ὃν ἁ ζ λ πρὸς λ θ.

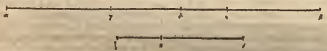
η Παντὸς τμάματος περιεχομένου ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κέντρον τοῦ βάρεος διαιρεῖ ταὶ τοῦ τμάματος διάμετρον, ὥστε εἶμεν ἡμιόλιον τὸ μέρος αὐτᾶς τὸ ποτὶ τᾷ κορυφᾷ τοῦ τμάματος, τοῦ ποτὶ ταὶ βάσιν. ἔστω τὸ α β γ τμᾶμα, οἷον ὡς εἴρηται. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἁ β δ. κέντρον δὲ τοῦ βάρεος τὸ θ σαμεῖον. δεικτέον ὅτι ἡμιόλιά ἐστιν ἁ β θ τᾶς θ δ. ἐγγεγράφθω δὴ τὸ α β γ τμᾶμα γνωρίμως τρίγωνον τὸ α β γ. οὗ κέντρον τοῦ βάρεος ἔστω τὸ ε. καὶ τετμάσθω δίχα ἑκατέρα τῶν α β, β γ, κατὰ τὰ ζ η, καὶ ἄχθωσαν παρὰ ταὶ β δ,



αἱ κ ζ, η λ. διάμετροι ἄρα γίνονται τῶν α κ β, β λ γ τμαμάτων. ἔστω οὖν τοῦ μὲν α κ β τμάματος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ μ. τοῦ δὲ β λ γ τὸ ν. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζ η, μ ν, κ λ. τοῦ ἄρα ἐξ ἀμφοτέρων τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐστὶ τὸ χ. ἐπεὶ δή ἐστιν ὡς ἁ β θ πρὸς θ δ, οὕτως ἁ κ μ

ἁ κμ πρὸς μζ. καὶ συνθέντι καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἁ βδ πρὸς τὰν κζ, οὕτως ἁ θδ πρὸς τὰν μζ. ἁ δὲ βδ τετραπλασίων τᾶς κζ· τοῦτο γὰρ ἔμπροσθεν δείκνυται, οὗ σαμεῖον ͽ. τετραπλασίων ἄρα καὶ ἁ δθ τᾶς μζ. ὥστε καὶ λοιπὰ ἁ βθ λοιπᾶς τᾶς κμ, τουτέστι τᾶς σχ τετραπλασίων. καὶ λοιπὸν ἄρα συναμφότερα ἁ βσ, χθ τριπλασίων τᾶς σχ. ἔστω τριπλασία ἁ βσ τᾶς σξ. καὶ ἁ χθ ἄρα τᾶς ξχ ἐστὶ τριπλασία. καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἁ βδ τᾶς βσ, καὶ τοῦτο ἔμπροσθεν δείκνυται. ἁ δὲ βσ τᾶς σξ τριπλασίων. ἁ ξβ ἄρα τᾶς βδ τρίτον μέρος ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἁ εδ τᾶς δβ τρίτον μέρος. ἐπειδήπερ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ αβγ τριγώνου ἐστὶ τὸ ε, καὶ λοιπὰ ἄρα ἁ ξε τρίτον μέρος τᾶς βδ. καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεός ἐστι τὸ θ σαμεῖον, τοῦ δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τῶν ακβ, βλγ τμαμάτων συγκειμένου μεγέθεος τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ χ. τοῦ δὲ αβγ τριγώνου τὸ ε. ἐσσεῖται ὡς τὸ αβγ τρίγωνον πρὸς τὰ καταλειπόμενα τμάματα, οὕτως ἁ χθ πρὸς θε. τριπλοῦν δὲ τὸ αβγ τρίγωνον τῶν τμαμάτων. ἐπειδήπερ τὸ ὅλον τμᾶμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ αβγ τριγώνου. τριπλασία ἄρα καὶ ἁ χθ τᾶς θε. ἐδείχθη δὲ ἁ χθ τριπλασία καὶ τᾶς χξ. πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ ξε τᾶς εθ. τουτέστιν ἁ δε τᾶς εθ. ἴσα γάρ ἐστιν αὐτᾷ. ὥστε ἑξαπλασία ἐστὶν ἁ δθ τᾶς θε. καὶ ἐντὶ τᾶς δε τριπλασία ἁ βδ. ἁμιολία ἄρα ἐντὶ ἁ βθ τᾶς θδ.

Εἴκα τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον ἔωντι ἐν τᾷ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ ἐλαχί- 9
στα ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ἃ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰ τρία πεμπτημόρια τᾶς ὑπεροχᾶς, ἃς ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μεγίστας τᾶς ἀνὰ λόγον, καὶ τᾷ τετραπλασίᾳ τᾶς δευτέρας, καὶ τᾷ ἑξαπλασίᾳ τᾶς γ, καὶ τᾷ γ τᾶς δ, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε ε τᾶς μεγίστας, καὶ τᾷ ι τᾶς β, καὶ τᾷ ι τᾶς γ, καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς δ, τοῦτον ἔχουσά τις λαφθῇ ποτὶ τὰν ὑπεροχάν, ἃ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἀνὰ λόγον τᾶς τρίτας, συναμφότεραι αἱ λαφθεῖσαι ἐσσοῦνται δύο πεμπτημόρια τᾶς μεγίστας. ἔστωσαν τέσσαρες γραμμαὶ ἀνὰ λόγον αἱ αβ, βγ, βδ, βε. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ βε πρὸς εα, τοῦτον ἐχέτω ἁ ζη ποτὶ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ β τᾶς αβ, καὶ δ τᾶς βγ, καὶ ς τᾶς βδ, καὶ γ τᾶς βε, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ ε τᾶς αβ, καὶ ι τᾶς γβ, καὶ ι τᾶς βδ, καὶ ε τᾶς βε, τοῦτον ἐχέτω τὸν λόγον ἁ ηθ ποτὶ τὰν αδ. δεικτέον ὅτι ἁ ζθ δύο



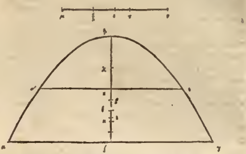
πεμπταμόρια ἐντὶ τᾶς αβ. ἐπεὶ γὰρ ἀνὰ λόγον ἐντὶ αἱ αβ, βγ, βδ, βε, καὶ αἱ αγ, γδ, δε, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί. καὶ συναμφότερος ἁ αβ, βγ πρὸς τὰν βδ ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν δε. καὶ συναμφότερος ἁ βδ, βγ ποτὶ τὰν εβ. καὶ πάντα πρὸς πάντα. τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ἁ αδ ποτὶ τὰν δε, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ τᾷ γ τᾶς γβ, καὶ ἁ δβ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε β, τᾶς βδ καὶ τὰν βε. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ τᾷ δ τᾶς βγ, καὶ τᾷ δ τᾶς βδ, καὶ τᾷ β τᾶς βε, ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε β τᾶς δβ, καὶ τὰν εβ, τοῦτον ἕξει ἁ δα πρὸς ἐλάσσονα τᾶς δε. ἐχέτω οὖν πρὸς δθ. καὶ ἀμφότεραι δὲ ποτὶ τὰς πρώτας αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον. ἕξει οὖν ἁ οα πρὸς αδ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ἴσα τᾷ τε β τᾶς αβ, καὶ δ τᾶς γβ, καὶ ς τᾶς βδ, καὶ γ τᾶς βε, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β συναμφοτέρας τᾶς αβ, εβ, καὶ δ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ἔχει δὲ καὶ ἁ αδ πρὸς ηθ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ ε συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β τᾶς αβ, καὶ τᾶς δ τᾶς γβ, καὶ τᾶς γ τᾶς εβ, καὶ ς τᾶς βδ. ἀνομοίως δὲ τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, δι᾽ ἴσου τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ οα πρὸς ηθ, ὃν ἁ πενταπλασία συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ι τᾶς γβ, βδ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλασίας συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ τᾶς τετραπλασίας συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ἀλλ᾽ ἁ συγκειμένα

ἔκ τε τᾶς ε̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς ε̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ἁ αο πρὸς κθ λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. πάλιν ἐπεὶ ἁ οδ πρὸς δα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ εβ, μετὰ τᾶς β̄ τᾶς βδ, πρὸς τὰν ἴσαν τᾷ συγκειμένᾳ ἔκ τε τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. δεῖ δὲ καὶ ὡς ἁ αδ πρὸς δε, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς β̄ τᾶς αβ, καὶ γ̄ τᾶς γβ, καὶ τᾶς β̄ δ ποτὶ τὰν ἴσαν τᾷ τε εβ, καὶ τᾷ ϐ̄ τᾶς βδ. ἀνομοίως οὖν τὸν λόγον τεταγμένων, τουτέστιν τεταραγμένας οὔσας τᾶς ἀναλογίας, δι᾽ ἴσου δεῖ ὡς ἁ οδ πρὸς δε, οὕτως ἁ β̄ τᾶς αβ, μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς βγ. καὶ ἁ β̄δ πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τᾶς β̄, συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ τᾶς δ̄ τᾶς γβ, βδ. ὥς τε καὶ ὡς ἁ εο πρὸς εδ δεῖ, οὕτως ἁ γβ μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς βδ, καὶ β̄ τᾶς εβ, πρὸς τὰν β̄ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβ, βδ. ἐστὶ δὲ καὶ ὡς ἁ δε πρὸς εβ, οὕτως ἅπα ἁ γ πρὸς γβ. ἐπεὶ καὶ κατὰ σύνθεσιν καὶ ἁ γ̄ τᾶς γδ, πρὸς τὰν γ̄ τᾶς δβ. καὶ ἁ β̄ τᾶς δε, πρὸς τὰν β̄ τᾶς εβ. ὥς τε καὶ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς αγ, καὶ ἁ γ̄ τᾶς γδ, καὶ β̄ τᾶς δε, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς γϐ, καὶ γ̄ τᾶς δϐ, καὶ ϐ̄ τᾶς εϐ. ἀνομοίως οὖν πάλιν τῶν λόγων τεταγμένων, τουτέστιν ἐν τεταραγμένᾳ ἀναλογίᾳ, δι᾽ ἴσου τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ εο πρὸς εβ, ὃν ἁ αγ μετὰ τᾶς γ̄ τᾶς γδ, καὶ ϐ̄ τᾶς δε, πρὸς διπλασίαν συναμφοτέρου τᾶς αβ, βε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γϐ, ϐδ. ὅλα οὖν ἁ οϐ πρὸς τὰν εβ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἴσα τᾷ τε γ̄ τᾶς αϐ μετὰ τᾶς ε̄ τᾶς γϐ, καὶ τᾷ γ̄ τᾶς ϐδ πρὸς τὰν ϐ, συναμφοτέρου τᾶς αϐ, ϐε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γϐ, ϐδ. καὶ ἐπεὶ ἐντὶ εδ, δγ, γα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἐντί, καὶ συναμφότερος ἑκάστα τῶν εβ, ϐδ, δϐ, ϐγ, γδ, γα. ἔσται καὶ ὡς ἁ εδ πρὸς δα, οὕτως συναμφότερος ἁ εϐ, ϐδ, πρὸς συναμφότερον τὰν δϐ, βγ, μετὰ τᾶς συναμφοτέρου τᾶς γβ, ϐα. καὶ συνθέντι ἄρα δεῖ ὡς ἁ ε πρὸς αδ, οὕτως συναμφότερος ἁ εϐ, ϐδ, μετὰ συναμφοτέρου τᾶς αβ, βγ καὶ συναμφοτέρου τᾶς γβδ. ὁ δεῖ συναμφότερος ἁ εϐα, μετὰ τᾶς β̄ συναμφοτέρου τᾶς δβγ, πρὸς συναμφότερον τὰν ϐδ, ϐα, μετὰ τᾶς β̄ τᾶς βγ. ὥς τε καὶ ἁ ϐ πρὸς τὰν ϐ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, τουτέστιν ὡς ἁ εα πρὸς αδ, οὕτως ἁ β̄ συναμφοτέρου τᾶς εϐα, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γβδ, πρὸς τὰν ϐ, συναμφοτέρου τᾶς αβδ, μετὰ τᾶς δ̄ τᾶς γϐ. ὥς τε ἁ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς συναμφοτέρου τᾶς αβε καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γϐδ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς ϐ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ δ̄ τᾶς γϐ. ἀλλ᾽ ὡς ἁ εα πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς αδ, οὕτως δεῖ ἁ εϐ πρὸς ζκ. καὶ ὡς ἄρα ἁ εϐ πρὸς ζκ, οὕτως ἁ ϐ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐε, μετὰ τᾶς δ̄ συναμφοτέρου τᾶς δϐγ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς ϐ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, μετὰ τᾶς δ̄ τᾶς γϐ. ἐδείχθη δὲ ὡς ὁ ϐ πρὸς εϐ, οὕτως ἁ γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, μετὰ τᾶς ε̄ τᾶς γϐ, πρὸς τὰν ϐ συναμφοτέρου τᾶς αϐε, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶς γϐδ. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα δεῖ ὡς ἁ οϐ, οὕτως ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ ε̄ τᾶς γϐ, πρὸς τὰ τρία πέμπτα τᾶς συγκειμένας ἔκ τε τᾶς ϐ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ δ̄ τᾶς γϐ. ἀλλὰ ἁ συγκειμένα ἔκ τε τᾶς γ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, καὶ ε̄ τᾶς γϐ, πρὸς μὲν τὰν συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς ϐ̄ συναμφοτέρου τᾶς αϐδ, τᾶς γϐ, λόγον ἔχει ὃν τρία πρὸς δύο. πρὸς δὲ τὰ τρία πέμπτα τᾶς αὐτᾶς λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς δύο. ἐδείχθη δὲ καὶ ἁ αο πρὸς κθ λόγον ἔχουσα, ὃν πέντε πρὸς δύο. καὶ ὅλα ἄρα ἁ βα πρὸς ὅλαν τὰν ζθ, λόγον ἔχει ὃν πέντε πρὸς δύο, εἰ δὲ τοῦτο, δύο πεμπτημόριά ἐντι ἁ ζθ τᾶς αβ, ὅπερ ἔδει.

ι Παντὸς τόμου τοῦ ἀπὸ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀφαιρουμένου, τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶς εὐθείας ἐστὶν ἃ διάμετρός ἐστι τοῦ τόμου. τὸν δὲ τρόπον κείμενον, διαιρεθείσας τᾶς εὐθείας εἰς ἴσα πέντε ἐπὶ μέσου πεμπταμορίου. ὥς τε τὸ τμᾶμα αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον τᾶς ἐλάσσονος βάσιος τοῦ τόμου ποτὶ τὸ λοιπὸν τμᾶμα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμισέας τᾶς μείζονος τῶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν συναμφοτέρα τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς ἐλάσσονος τῶν βάσεων, καὶ τᾷ μείζονι ποτὶ τὸ στερεόν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ἡμισέας τᾶς ἐλάσσονος τᾶν βάσεων τοῦ τόμου, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέρας, τᾷ τε διπλασίᾳ τᾶς μείζονος καὶ τᾷ ἐλάσσονι αὐτᾶν. ἔστωσαν ὀρθογωνίου κώνου τομαὶ δύο εὐθεῖαι αἱ αγ, δε. διάμετρος δὲ ἔστω τοῦ αβγ τμάματος, ἁ βζ. φανερὸν δ᾽ ὅτι καὶ τοῦ αδεγ διάμετρος ἐστὶν ἁ ηζ. καὶ αἱ μὲν αγ, δε παράλληλοι ἐντὶ τᾷ κατὰ τὸ β ἐφαπτομένᾳ τᾶς τομᾶς. καὶ τᾶς ηζ εὐθείας, διαιρεθείσας εἰς πέντε ἴσα μέσον ἔστω πεμπταμόριον ἁ ϐκ. ἁ δὲ ϐι πρὸς τὰν ικ, τὸν αὐ-

τὸν

τὸν ἔχετο λόγον, ὃν ἔχει τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾶ τε β τᾶς δκ, καὶ τᾶ αζ, ποτὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν ἔχον τὸ ἀπὸ τᾶς δκ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἀμφοτέραις τᾶ β τᾶς αζ, καὶ τᾶ δκ. δεικτέον ὅτι τοῦ αδκγ τόμου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ ι σαμεῖον. ἔστω δὴ τᾶ μὲν ζβ ἴσα ἁ μν, τᾶ δὲ κβ ἴσα ἁ νο. καὶ εἰλήφθω ταῖν μὲν μν ο μετὰ ἀνάλογον ἁ νξ. τετάρτη δὲ ἀνὰ λόγον ἁ τν. καὶ ὡς τμ πρὸς τν, οὕτως ἁ ζθ πρὸς τινα ἀπὸ τοῦ ι, ὅπου ἂν ἔρχηται τὸ ἕτερον σαμεῖον. οὐδὲν γὰρ διαφέρει, ἔτε καὶ μεταξὺ τῶν ζ, η, ἔτε καὶ μεταξὺ τῶν η, β, τὴν ιρ.



καὶ ἐπεὶ γὰρ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς διάμετρος ἐστὶ τοῦ τμάματος ἁ ζβ. ἁ βζ δὲ, ἤτοι ἀρχὴ ἐστὶ τῆς τομῆς, ἢ παρὰ τὴν διάμετρον ἦκται. αἱ δὲ αζ, δκ εἰς αὐτὴν τεταγμέναι εἰσὶ κατηγμέναι. ἐπειδὴ παράλληλοι εἰσὶ τᾶ ἀπὸ τοῦ β τᾶς τομᾶς ἐφαπτομένᾳ. αἱ δὲ τοῦτο, ἔστιν ὡς ἡ αζ πρὸς δκ δυνάμει, οὕτως ἁ ζβ πρὸς βκ μάκει, τουτέστιν ἁ μν πρὸς νο. ὡς δὲ ἁ μν πρὸς νο μάκει, οὕτως ἁ μν πρὸς νξ δυνάμει. καὶ ὡς ἄρα ἁ αζ πρὸς δκ δυνάμει, οὕτως ἁ μν πρὸς νξ δυνάμει. ὥστε καὶ μάκει ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δκ κύβον, οὕτως ὁ ἀπὸ μν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ νξ κύβον. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δκ κύβον, οὕτω τὸ βαγ τμᾶμα πρὸς τὸ δβε τμᾶμα. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ μν κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ νξ κύβον, οὕτως ἁ μν πρὸς ντ. ὥστε καὶ διελόντι ἐστὶν ὡς ὁ αδγε τόμος πρὸς τὸ δβε τμᾶμα, οὕτως ἁ μτ πρὸς ντ, τουτέστι τὰ γ´ ε´ τᾶς ηζ πρὸς ντ. καὶ ἐπεὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὰν συγκειμέναν, ἔκ τε τᾶς β τᾶς δκ καὶ τᾶς αζ, πρὸς τὸν ἀπὸ αζ κύβον λόγον ἔχει, ὃν ἁ β τᾶς δκ μετὰ τᾶς αζ πρὸς ζα. ὥστε καὶ ἁ β τᾶς νξ μετὰ τᾶς νμ, πρὸς νμ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ἀπὸ αζ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ δκ κύβον, οὕτως ἁ μν πρὸς ντ. ὡς δὲ ὁ ἀπὸ δκ κύβος πρὸς τὸ στερεὸν, τὸ βάσιν μὲν ἔχον, τὸ ἀπὸ δκ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς διπλασίας τῆς αζ, μετὰ τᾶς δκ, οὕτως ἁ δκ πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τᾶς διπλασίας τᾶς αζ, καὶ τᾶς δκ. ὥστε καὶ ἁ τν πρὸς τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τᾶς β τᾶς ον καὶ τᾶς τν. γίγονεν οὖν τέσσαρα μεγέθη, τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ ταὶ συγκειμέναν ἔκ τε τᾶς διπλᾶς τᾶς δκ, καὶ τᾶς αζ. καὶ ὁ ἀπὸ αζ κύβος, καὶ ὁ ἀπὸ δκ κύβος, καὶ τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δκ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην, ἔκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δκ, τέτταρσι μεγέθεσιν ἀνάλογον σὺν δύο λαμβανομένοις, τῇ τε συγκειμένῃ ἔκ τε τῆς β τᾶς νξ, καὶ τῆς νμ, καὶ ἑτέρου μεγέθεος τῆς μν. καὶ ἄλλο ἑξῆς ἡ ντ. καὶ τελευταῖον ἡ συγκειμένη, ἔκ τε τῆς β τῆς νο, καὶ τῆς ντ. δι᾽ ἴσου ἄρα γίνεται, ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ αζ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς δκ, καὶ τῆς αζ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ δκ τετράγωνον, ὕψος δὲ τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς αζ, καὶ τῆς δκ, οὕτως ἡ συγκειμένη ἔκ τε τῆς β τῆς νξ, καὶ τῆς μν, πρὸς τὴν συγκειμένην ἔκ τε τῆς β τῆς νο, καὶ τῆς ντ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ εἰρημένον στερεὸν πρὸς τὸ εἰρημένον στερεὸν, οὕτως ἡ θι πρὸς ικ. καὶ ὡς ἄρα ἡ θι πρὸς ικ, οὕτως ἡ συγκειμένη πρὸς τὴν συγκειμένην. ὥστε καὶ συνθέντι, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ πενταπλάσια. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ζκ πρὸς ικ, οὕτως ἡ πενταπλῆ συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ ι συναμφοτέρου τῆς νξ, νο, πρὸς τὴν β τῆς ον, καὶ τὴν ντ. καὶ ὡς ἡ ζκ πρὸς ζκ οὖσαι αὐτῆς δύο πέμπτα, οὕτως ἡ ι συναμφοτέρου τῆς μντ, καὶ δεκαπλῆ

συναμ-

συναμφοτέρου τᾶν ν ξ ο, πρὸς τὰν β̄ συναμφοτέρου τᾶν μ ν̄ τ, καὶ δ̄ συναμφοτέρου τᾶν ν ξ̄ ο. ἔσαι οὖν ὡς ζ η πρὸς ζ ι, οὕτως ἡ ε̄ συναμφοτέρου τᾶν μ ν̄ τ, καὶ ῑ συναμφοτέρου τᾶν ξ ν̄ ο πρὸς τὰν συγκειμέναν, ἐκ τε τᾶν β̄ τᾶν μ̄ ν, καὶ δ̄ τᾶν ν̄ ξ, καὶ ε̄ τᾶν ο̄ ν, καὶ γ̄ τᾶν ν̄ τ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνὰ λόγον αἱ μ ν̄ ξ, ο ν̄ τ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν ἡ ν τ πρὸς τ̄ μ, οὕτως εἰλημμένη τις ἡ ρ ι πρὸς τὰ τρία πέμπτα τῆς ζ η, τουτέστι τᾶν μ̄ ο. ὡς δὲ ἡ συγκειμένη ἐκ τε τᾶν β̄ τᾶν ν̄ μ, καὶ δ̄ τῆς ν̄ ξ, καὶ ε̄ τᾶν ν̄ ο, καὶ γ̄ τᾶν ν̄ τ, πρὸς τὰν συγκειμέναν ἐκ τε τᾶν ε̄ συναμφοτέρου τᾶν μ ν̄ τ, καὶ ῑ συναμφοτέρου τᾶν ξ ν̄ ο, οὕτως ἑτέρα τις εἰλημμένη ἡ ι ζ πρὸς τὰν ζ η, τουτέστιν πρὸς τὴν μ̄ ο, ἔσαι διὰ τὰ πρότερον ἡ ρ ζ δύο πέμπτα τῆς μ̄ ν. τουτέστι τῆς ζ̄ β. ὥστε κέντρον βάρεος ἐστὶ τοῦ α β̄ γ τμήματος τὸ ρ̄ σαμεῖον. ἔστω δὴ καὶ τοῦ δ β̄ ε τμάματος κέντρον βάρεος τὸ χ̄ σαμεῖον. τοῦ α δ̄ ε γ τόμου ἔσαι τὸ κέντρον τοῦ βάρεος ἐπὶ τᾶν ἐπ' εὐθείας τᾶν χ̄ ρ, τὸ μὲν αὐτὸν πρὸς αὐτὰν λόγον ἐχούσης, ὃν ἔχει ὁ τομεὺς πρὸς τὸ λοιπὸν τμᾶμα. ἔστι δὲ τὸ ῑ σαμεῖον. ἐπεὶ γὰρ τᾶν μὲν ζ β τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ β̄ ρ, τᾶν δὲ η̄ β τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ β̄ χ. καὶ λοιπῆς ἄρα τᾶν η̄ ζ, τρία πέμπτα ἐστὶν ἡ χ̄ ρ. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς μὲν ὁ α δ ε̄ γ τομεὺς πρὸς τὸ δ β̄ ε τμᾶμα, οὕτως ἡ μ̄ τ πρὸς ν̄ τ. ὡς δὲ ἡ μ̄ τ πρὸς τὰν ν̄ τ, οὕτως τὰ τρία πέμπτα τᾶν η̄ ζ, ἥ τις ἐστὶν ἡ χ̄ ρ πρὸς ρ̄ ι. ἔσαι ἄρα καὶ ὡς ὁ α δ ε̄ γ τομεὺς πρὸς τὸ δ β̄ ε τμᾶμα, οὕτως ἡ χ̄ ρ πρὸς ρ̄ ι. καὶ ἔστι μὲν τοῦ ὅλου τμάματος κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ρ̄ σαμεῖον, τοῦ δὲ δ β̄ ε κέντρον βάρεος τὸ χ̄. φανερὸν οὖν, ὅτι καὶ τοῦ δ ε̄ γ τομέως τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τὸ ῑ σημεῖον.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΨΑΜΜΙΤΗΣ.

Οἴονταί τινες βασιλεῦ Γέλων τοῦ ψάμμου τὸν ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει. λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ Συρακούσας τε καὶ τὰν ἄλλαν Σικελίαν ὑπάρχοντος, ἀλλὰ καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν ταύτε οἰκημέναν καὶ τὰν ἀοίκητον. ἐν τί νες δὲ αὐτὸν ἄπειρον   ἐν ἡμὲν οὐχ ὑπολαμβάνοντι, μηδένα μέντοι ταλικοῦτον κατωνομασμένον ὑπάρχειν, ὅς τις ὑπερβάλλει τὸ πλῆθος αὐτοῦ. οἱ δὲ οὐ † δοξάζοντες. δῆλον ὡς εἰ νοήσαιεν ἐκ τοῦ ψάμμου ταλικοῦτον ὄγκον συγκείμενον τὰ μὲν ἄλλα ἁλίκαν ὁ πᾶς γὰρ ὄγκος ἀναπεπληρωμένων ἐν αὐτῷ τῶν τε πελαγίων πάντων, καὶ τῶν κοιλωμάτων τᾶς γᾶς ἴσον ὕψος τοῖς ὑψηλοτάτοις τῶν ὀρέων πολλαπλασίως μὴ γνωσεῖν τε μὴ δὲ ἐν ἀκαρεῖ ἔμμεναι ὑπερβάλλοντα τὸ πλῆθος αὐτοῦ. ἐγὼ δὲ πειρασοῦμαι τοι δεικνύειν δι' ἀποδείξιων γεωμετρικῶν, αἷς παρακολουθήσεις, ὅτι τῶν ὑφ' ἁμῶν κατωνομασμένων ἀριθμῶν, καὶ ἐνδεδομένων ἐν τοῖς ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένοις, ὑπερβάλλοντί τινες οὐ μόνον τὸν ἀριθμὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ γᾷ πεπληρωμένᾳ, καθάπερ εἴπαμεν, ἀλλὰ καὶ τὸν τοῦ μέγεθος ἴσον ἔχοντος τῷ κόσμῳ. κατέχεις δὲ διότι καλεῖται κόσμος ὑπὸ μὲν τῶν πλείστων ἀστρολόγων ἁ σφαῖρα, ἇς ἐστὶ κέντρον μὲν τὸ τᾶς γᾶς κέντρον. ἡ δὲ τοῦ κέντρου   εὐθεῖα τᾷ μεταξὺ τοῦ κέντρου τοῦ ἁλίου, καὶ τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς. ταῦτα γὰρ ἐν ταῖς γραφομέναις παρὰ τῶν ἀστρολόγων διακρίσας Ἀρίσταρχος ὁ Σάμιος ὑποθεσίων ἐξέδωκεν γράψας, ἐν αἷς ἐκ τῶν ὑποκειμένων συμβαίνει τὸν κόσμον πολλαπλάσιον εἶμεν τοῦ νῦν εἰρημένου. ὑποτίθεται γὰρ τὰ μὲν ἀπλανῆ τῶν ἄστρων, καὶ τὸν ἅλιον μένειν ἀκίνητον, τὰν δὲ γᾶν περιφέρεσθαι περὶ τὸν ἅλιον κατὰ κύκλου περιφέρειαν, ὅς ἐστιν ἐν μέσῳ τῷ δρόμῳ κείμενος, τὰν δὲ τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τῷ ἁλίῳ κειμέναν τῷ μεγέθει ταλικαύταν εἶμεν. ἔστι ὥστε τὸν κύκλον καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι, τοιαύταν ἔχειν ἀναλογίαν ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἀποστασίαν, οἵαν ἔχει τὸ κέντρον τᾶς σφαίρας ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν. τοῦτο δὲ εὔδηλον, ὡς ἀδύνατον ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ τὸ τᾶς σφαίρας κέντρον οὐδὲν ἔχει μέγεθος, οὐδὲ λόγον ἔχειν οὐδένα ποτὶ τὰν ἐπιφάνειαν τᾶς σφαίρας ὑπολαπτέον αὐτό. ἐκδεκτέον ἢ τὸν Ἀρίσταρχον διανοεῖσθαι τόδε. ἐπειδὴ δὲ τὰν γᾶν ὑπολαμβάνομεν, ὡς περὶ μὲν τὸ κέντρον τοῦ κόσμου, ὃν ἔχει λόγον ἁ γᾶ ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον τὰν σφαῖραν, ἐν ᾗ ἐστὶν ὁ κύκλος καθ' ὃν τὰν γᾶν ὑποτίθεται περιφέρεσθαι ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν τὰς ἀποδείξιας τῶν φαινομένων οὕτως ὑποκειμένων ἐναρμόζει. καὶ μάλιστα φαίνεται τὸ μέγεθος τᾶς σφαίρας, ἐν ᾇ ποιεῖται τὰν γᾶν κινουμέναν ἴσον ὑποτίθεται τῷ ὑφ' ἁμῶν εἰρημένῳ κόσμῳ. φαμὲν δὴ καὶ εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανῶν ἄστρων σφαῖραν εἶμεν. καὶ οὐ τινάς,

† ἔτως

οὐ δυνατὲ, δειχθῶσι τῶν ἐν ἀρχαῖς τῶν κατονομαξιῶν ἐχόντων, ὑπερβαλλόντας τῷ πλήθει τὸν καὶ τοῦ ψάμμου, τοῦ μεγέθους ἔχον τὸ ἴσον τᾷ εἰρημένᾳ σφαίρᾳ. ὑποκειμένων τῶνδε, πρῶτον μὲν τὰν περίμετρον τᾶς γᾶς εἶμεν, ὡς τῶν μυριάδων σταδίων καὶ μείζον, καὶ περὶ τῶν πειραμένων ἀποδεικνύειν, καθὼς καίτοι παρακολουθεῖς ἐοῦσαν αὐτὰν, ὡς λ' μυριάδων σταδίων. ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καθὼς τὸ μέγεθος τᾶς γᾶς ὡς δεκαπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν προτέρων δεδοξασμένων, ταὶν περίμετρον αὐτᾶς ὑποτίθεμαι εἶμεν, ὡς τῶν λ λ σταδίων, καὶ μείζον. μετὰ δὲ τοῦτο ταὶν διάμετρον τᾶς γᾶς μείζονα εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας. καὶ τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ὁμοίως τὰ αὐτὰ λαμβάνων τοῖς πλείστοις τῶν προτέρων ἀστρολόγων. μετὰ δὲ ταῦτα ταὶν διάμετρον τοῦ ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, ὡς τριακονταπλασίαν εἶμεν, καὶ μὴ μείζονα. καὶ περὶ τῶν προτέρων ἀστρολόγων εὐδοξοῦ μὲν, ὡς ἐννεαπλάσιον ἀποφαινομένου. φειδίας δὲ ὁ ἀκούπατρος, ὡς δὴ δωδεκαπλασίαν. ἀριστάρχου δὲ πεπειραμένου δεικνύειν, ὅτι ἐστὶν ἁ διάμετρος ἁλίου τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, μείζων μὲν ἢ ὀκτωκαιδεκαπλασίων, ἐλάσσων δὲ ἢ εἰκοσαπλασίων. ἐγὼ δὲ ὑπερβαλλόμενος καὶ τοῦτον, ὅπως τὸ ὑποκείμενον ἀμφίλογον ἦ δεδειγμένον, ὑποτίθεμαι ταὶν διάμετρον τᾶς σελήνας, ὡς τριακονταπλασίας εἶμεν, καὶ μὴ μειζόνων. ποτὶ δὲ τούτοις ταὶν διάμετρον τοῦ ἁλίου μείζονα εἶμεν τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. τοῦτο δὲ ὑποτίθεμαι. ἀριστάρχου μὲν εἰρηκότος τοῦ κύκλου τοῦ ζωδίου τὸν ἅλιον φαινόμενον, ὡς τὸ εἰκοστὸν καὶ ἑπτακοσιοστόν. αὐτὸς δὲ ἐπισκεψάμενος τόνδε τὸν τρόπον ἐπειράθην ὀργανικῶς λαβεῖν ταὶν γωνίαν ᾧ αὖ ὁ ἅλιος ἐναρμόζει ταὶν κορυφὰν ἔχουσα ποτὶ τᾷ ὄψει, τὸ μὲν ὅμοιον ἀκριβεῖ λαβεῖν οὐκ εὐχερὲς ἐστι διὰ τὸ μήτε ταὶν ὄψιν, μήτε τὰς χεῖρας μήτε τὰ ὄργανα, δι' ὧν λαβεῖν ἀξιοπίστας εἶμεν τὸ ἀκριβὲς ἀποφαίνεσθαι. περὶ δὲ τούτων ἐπὶ τοῦ παρόντος οὐκ εὔκαιρον μακύνειν, ἄλλως τε καὶ πλεονάκις τοιούτων ἐμπεφανισμένων. ἀπόχρη δέ μοι οὖν τὰν ἀπόδειξιν τοῦ προκειμένου γωνίαν λαβεῖν, ἅ τις ἐστὶ μείζων τᾶς γωνίας αἷς αὖ ὁ ἅλιος ἐναρμόζει ταὶν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ ὄψει, καὶ πάλιν ἄλλαν γωνίαν λαβεῖν, ἅ τις ἐστὶν οὐκ ἐλάσσων τᾶς γωνίας ἃς αὖ ὁ ἅλιος ἐναρμόζει ταὶν κορυφὰν, ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. τεθέντος οὖν μακροῦ κανόνος ἐπὶ πέδου ὀρθὸν ἐν τόπῳ κειμένου. ὅθεν ἤμελλεν ἀνατέλλειν ὁ ἅλιος ὁρᾶσθαι, καὶ κυλίνδρου μικροῦ τορνευθέντος, καὶ τεθέντος εὐθὺ τὸν κανόνα ὀρθοῦ εὐθέως μετὰ ταὶν ἀνατολὰν τοῦ ἁλίου. ἔπειτ' ἐόντος αὐτοῦ ποτὶ τῷ ὁρίζοντι, καὶ δυναμένου τοῦ ἀντιβλέπεσθαι ἐπεστραφῆ ὁ κανὼν ἐς τὸν ἅλιον, καὶ ἁ ὄψις κατεστάθη εὐθὺ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος. ὁ δὲ κύλινδρος ἐν μέσῳ κείμενος, τοῦ τ' ἁλίου καὶ τᾶς ὄψιος, ἐπισκότει τῷ ἁλίῳ, ἀποχωριζόμενος τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος ἐν ᾧ ἄρξατο παραφαίνεσθαι τοῦ ἁλίου μικροῦ ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου κατεστάθη ὁ κύλινδρος, εἰ μὲν ὁμοίως συνέβαινεν τὰν ὄψιν ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέπειν εὐθείαν ἀχθεῖσαν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἐπιψαύουσα τοῦ κυλίνδρου. ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ ταὶν ἀχθεῖσαν ἐλάσσων κα εἰς τὰς γωνίας, αἷς αὖ ὁ ἅλιος ἐναρμόζει ταὶν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει διὰ τὸ περιβλέπεσθαί τι τοῦ ἁλίου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κυλίνδρου. ἐπεὶ δ' αἱ ὄψιες οὐκ ἀφ' ἑνὸς σαμείου βλέποντι, ἀλλὰ ἀπό τινος μεγέθους ἐλάφθη τι μέγεθος στρογγύλον, οὐκ ἔλασσον ὄψιος. καὶ τεθέντος τοῦ μεγέθεος εὐθὺ τὸ ἄκρον τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἐπιψαύουσα τοῦ μεγέθεος καὶ τοῦ κυλίνδρου. ἁ οὖν περιεχομένα γωνία ὑπὸ τὰν ἀχθεῖσαν ἐλάσσων ἦς τᾶς γωνίας, αἷς αὖ ὁ ἅλιος ἐναρμόζει ταὶν κορυφὰν ἔχουσας ποτὶ τᾷ ὄψει. τὸ δὲ μέγεθος τὸ οὐκ ἔλασσον ὄψιος, τόνδε τὸν τρόπον εὑρίσκεται. δύο κυλίνδρια ἀναλαμβάνεται λεπτὰ ἰσοπαχέα ἀλλήλαις, τὸ μὲν λευκὸν, τὸ δὲ οὔ. καὶ προστίθενται πρὸ τᾶς ὄψιος, τὸ μὲν λευκὸν ἀφεστακὸς ἀπ' αὐτᾶς, τὸ δὲ οὐ λευκὸν ὡς ἔστι ἐγγυτάτω τᾶς ὄψιος, ὥστε καὶ θιγγάνειν τοῦ προσώπου. εἰ μὲν οὖν τὰ λαφθέντα κυλίνδρια λεπτότερα ἐόντι τᾶς ὄψιος, περιλαμβάνεται ὑπὸ τᾶς ὄψιος τὸ ἐγγὺς κυλίνδριον, καὶ ὁρᾶται ὑπὸ αὐτᾶς τὸ λευκὸν εἰκόνα παραπολὺ λεπτότερον ἐόντα τᾶν, εἰ δέκα μὴ παραπολὺ μερία τινὰ τοῦ λευκοῦ ὁρῶνται ἀφ' ἑκάτερα τᾶς ἐγγὺς τᾶς ὄψιος. λαφθέντων δὲ τῶνδε τῶν κυλίνδρων, ἔπειτα δὴ ὧν πῶς τῷ πάχει ἐπισκότει τὸ ἕτερον αὐτῶν τῷ ἑτέρῳ, καὶ οὐ πλείονι τόπῳ τὸ δὴ ταλικοῦτον μέγεθος ἁλίκον ἐστὶ τὸ πάχος τῶν κυλίνδρων τῶν τοῦτο ποιούντων μάλιστα πῶς ἐστὶν οὐκ ἔλασσον τᾶς ὄψιος, οὐδὲ γωνία, οὐκ ἐλάσσων τᾶς γωνίας αἷς αὖ ὁ ἅλιος ἐναρμόζει ταὶν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. οὕτως ἐλάφθη ἀποσταθέντος ἀπὸ τοῦ κανόνος τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τᾶς ὄψιος. οὕτως ὥς ἐπισκοτεῖν τὸν κύλινδρον ὅλῳ ἁλίῳ, καὶ ἀχθεῖσαν εὐθεῖαν ἀπ' ἄκρου τοῦ κανόνος, ἐν ᾧ τόπῳ ἁ ὄψις κατεστάθη. ἐπιψαυουσᾶν τοῦ κυλίνδρου ἁ περιεχομένα γωνία ὑπὸ τᾶν ἀχθεισᾶν εὐθειᾶν οὐκ ἐλάσσων γίνεται τᾶς γωνίας, αἷς αὖ ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει.

ταῖς δὴ γωνίαις ταῖς οὕτως λαφθείσαις καταμετρηθείσας ὀρθὰς γωνίας ἐγγύτατα ἁ μὲν εἴη διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς ρξδ ἐλάττων ἢ ἓν μέρος τούτων. ἁ δὲ ἐλάττων διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, μείζων ἢ ἓν μέρος τούτων. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ γωνία ἃ ἴσαν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει, ἐλάττων μὲν ἐστιν, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς, εἰς ρξδ. τούτων ἓν μέρος μείζων δέ, ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, τούτων ἓν μέρος. πεπιστευμένων δὴ τούτων δεῖ ἂν διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγωνίου πλευρᾶς, τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ. νοείσθω γὰρ ἐπίπεδον ἐκβεβλημένον διά τε τοῦ κέντρου τᾶς γᾶς, καὶ διὰ τᾶς ὄψιος, μικρὸν ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἐόντος τοῦ ἁλίου. τεμνέτω δὲ τὸ ἐκβεβλημένον ἐπίπεδον, τὸν μὲν κόσμον κατὰ τὸν α β γ κύκλον, τὰν δὲ γᾶν κατὰ τὸν δ ε ζ. τὸν δὲ ἅλιον κατὰ τὸν σ η κύκλον. κέντρον δὲ ἔστω τᾶς μὲν γᾶς τὸ θ, τοῦ δὲ ἁλίου τὸ κ, ὄψις δὲ ἔστω τὸ δ. καὶ ἄχθωσαν εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι τοῦ σ η κύκλου. ἀπὸ μὲν τοῦ δ αἱ δ λ, δ ξ. ἐπιψαυόντων δέ, κατὰ τὸ ν καὶ τὸ τ. ἀπὸ δὲ τοῦ θ, αἱ θ μ, θ ο. ἐπιψαυόντων δὲ κατὰ τὸ χ καὶ τὸ ρ. τὸν δὲ α β γ κύκλον τεμνόντων αἱ θ μ, θ ο κατὰ τὸ α καὶ τὸ β. ἐστὶ δὴ μείζων ἁ θ κ τᾶς δ κ, ἐπεὶ ὑπόκειται ὁ ἅλιος ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα εἶμεν, ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δ λ, δ ξ μείζων ἐστὶ τᾶς γωνίας τᾶς περιεχομένας ὑπὸ τᾶν θ μ, θ ο. ἁ δὲ περιεχομένα



γωνία ὑπὸ τῶν δ λ, δ ξ, μείζων μέν ἐστιν ἢ διακοσιοστὸν μέρος ὀρθᾶς. ἐλάττων δέ, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ. τούτων ἓν μέρος, * ἴσον γωνίᾳ ἐστὶ τᾷ γωνίᾳ, αἷς ἂν ὁ ἅλιος ἐναρμόζει τὰν κορυφὰν ἔχουσαν ποτὶ τᾷ ὄψει. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ ταῖν θ μ, θ ο ἐλάττων ἐστὶν ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς ρξδ, τούτων ἓν μέρος. ἁ δὲ α β εὐθεῖα ἐλάττων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας ἓν τμᾶμα διαιρεθείσας τᾶς τοῦ α β γ κύκλου περιφερείας εἰς χνς. ἁ δὲ τοῦ εἰρημένου πολυγωνίου περίμετρος ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ α β γ κύκλου, ἐλάττονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ μδ ποτὶ τὰ ζ. διὰ τὸ παντὸς πολυγωνίου ἐγγεγραμμένου ἐν κύκλῳ τὰν περίμετρον ποτὶ τὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἐλάττονα λόγον ἔχειν, ἢ τὰ μδ ποτὶ τὰ ζ. ἐπίστασαι γὰρ δεδειγμένον ὑφ' ἁμῶν, ὅτι παντὸς κύκλου ἁ περιφέρεια μείζων ἐστὶν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου, ἐλάσσονι ἢ ἑβδόμῳ μέρει, τᾶς δὲ ἐλάττω λόγον ἔχει, ἢ ἁ β α ποτὶ τὰν θ κ. ἢ τὰ ια ποτὶ τὰ αρμη. ὥστε ἐλάττων ἐστὶν ἁ β α τᾶς θ κ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος. τᾷ δὲ β α ἴσα ἐστὶν ἁ διάμετρος τοῦ σ η κύκλου. διότι καὶ ἁ ἡμίσεια αὐτᾶς ἁ φ α, ἴσα ἐστὶ τᾷ κ ρ. ἴσαν γὰρ ἐουσᾶν ταῖν θ κ τᾷ θ α, ἀπὸ τοῦ περάτων κάθετοι ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰν

αὐτὴ ἡ γωνία ἴσα τᾷ γωνίᾳ

ταὐ αὐτὰν γωνίαν. δῆλον οὖν, ὅτι ἁ διάμετρος τοῦ αβγ κύκλου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ἑκατοστὸν μέρος τᾶς θκ. καὶ ἁ ευ γωνία ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς διαμέτρου τοῦ αβγ κύκλου, ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ δζ κύκλος τοῦ σκ κύκλου. ἐλάσσονες ἄρα ἐντὶ ἀμφότεραι αἱ βυ, κσ, ἢ ἑκατοστὸν μέρος τοῦ θκ. ὥστε ἁ θκ ποτὶ τὰν υς ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεὶ ἁ μὲν θκ ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς θρ, ἁ δὲ συ ἐλάσσων τᾶς δτ, ἐλάσσω ἄρα καὶ λόγον ἔχει ἁ θρ ποτὶ τὰν δτ, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ, ἐπεὶ τῶν θκρ, δκτ τριγώνων ὀρθογωνίων ἐόντων, αἱ μὲν κρ, κτ πλευραὶ ἴσαι ἐντί. αἱ δὲ θρ, δτ ἄνισοι. καὶ μείζων ἁ θρ, ἁ γωνία περιεχομένα ὑπὸ τῶν δτ, δκ, ποτὶ ταὐ γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θρ, θκ, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ θκ ποτὶ τὰν δκ. ἐλάσσω δὲ, ἢ ἁ θρ ποτὶ τὰν δτ. εἰ γὰρ κα δυῶν τριγώνων ὀρθογωνίων αἱ μὲν ἅτεραι πλευραὶ αἱ περὶ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ἴσαι ἔωντι, αἱ δὲ ἅτεραι ἄνισοι, ἁ μείζων γωνία τᾶν ποτὶ ταῖς ἀνίσοις πλευραῖς ποτὶ τὰν ἐλάσσονα, μείζονα μὲν ἔχει λόγον ἢ ἁ μείζων γραμμὰ, τᾶν ὑπὸ τὰν ὀρθὰν γωνίαν ὑποτείνουσα, ποτὶ τὰν ἐλάσσονα. ἐλάσσονα δὲ, ἢ ἁ μείζων γραμμὰ τᾶν περὶ ταὐ ὀρθὰν γωνίαν ποτὶ ταὐ ἐλάσσονα. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τῶν δλ, δξ ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τῶν θν, θμ, ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ ἁ θρ ποτὶ ταὐ δτ. ἃ τις ἐλάσσω λόγον ἔχει, ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. ὥστε ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τοῦ δλ, δξ, ποτὶ τὰν γωνίαν τὰν περιεχομέναν ὑπὸ τοῦ θμ, θο, ἐλάσσω λόγον ἔχει ἢ τὰ ρ ποτὶ τὰ ϙθ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τοῦ δλ, δξ μείζων ἢ διακοσιοστὸν μέρος, ὀρθᾶς, εἴη κα ἁ γωνία ἁ περιεχομένα ὑπὸ τοῦ θμ, θο μείζων, ἢ τᾶς ὀρθᾶς διαιρεθείσας εἰς δισμύρια τούτων ϙθ μέρος, ὥστε μείζων ἐστὶν ἢ διαιρεθείσας τᾶς ὀρθᾶς εἰς σ, καὶ γ. τούτων ἓν μέρος ἄρα ἁ βα μείζων ἐστὶ τᾶς ὑποτεινούσας, ἓν τμᾶμα διῃρημένας τᾶς τοῦ αβγ κύκλου περιφερείας, εἰς ωιβ, τὰν δὲ αβ ἴσα ἐντὶ ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος. δῆλον οὖν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἁ τοῦ ἁλίου διάμετρος τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς.

Τούτων δὲ ὑποκειμένων, δείκνυται καὶ τάδε, εἶμεν ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων, καὶ ἔτι ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις, μυριάδες ρ. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τοῦ ἁλίου μὴ μείζων εἶμεν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, τὰν δὲ διάμετρον τᾶς γᾶς μείζων εἶμεν τᾶς διαμέτρου τᾶς σελήνας, δῆλον ὡς ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. πάλιν δὲ ἐπεὶ ἐδείχθη ἁ διάμετρος τοῦ ἁλίου μείζων ἐοῦσα τᾶς τοῦ χιλιαγώνου πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν μέγιστον κύκλον ἐγγραφομένου τῶν ἐν τῷ κόσμῳ, φανερὸν ὅτι ἁ τοῦ χιλιαγώνου περίμετρος τοῦ εἰρημένου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ χιλιοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ ἁλίου. ἁ δὲ διάμετρος τοῦ ἁλίου ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριακονταπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ὥστε ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἐπεὶ οὖν ἁ περίμετρος τοῦ χιλιαγώνου, τᾶς μὲν διαμέτρου τᾶς γᾶς ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρισμυριοπλασίων, τᾶς δὲ διαμέτρου τοῦ κόσμου μείζων ἢ τριπλασίων. δέδεικται γάρ τοι, διότι παντὸς κύκλου ἁ διάμετρος ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ τρίτον μέρος παντὸς πολυγωνίου περιμέτρου, ὁ καὶ εἰς ὁ ἐστὶ ἰσόπλευρον, καὶ πολυγώνου. ὅτι τοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου μὲν τοῦ κύκλου εἴη, καὶ ἁ διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάττων ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς. ἁ μὲν οὖν διάμετρος τοῦ κόσμου ἐλάσσων ἐοῦσα, ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου, ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες ρ, ἐκ τούτου δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται, τὸν περίμετρον τᾶς γᾶς μὴ μείζονα εἶμεν, ἢ τριακοσίας μυριάδας σταδίων ἐστίν. ἁ δὲ περίμετρος τᾶς γᾶς, μείζων ἐστὶ τριπλασία τᾶς διαμέτρου, διὰ τὸ παντὸς κύκλου τὴν περιφέρειαν μείζονα εἶμεν ἢ τριπλασίων τᾶς διαμέτρου, δῆλον ἁ διάμετρος τᾶς γᾶς ἐλάσσων ἐστὶν ἢ σταδίων ρ μυριάδων. ἐπεὶ οὖν ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς, δῆλον ὡς ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ. περὶ μεγεθέων μὲν τῶν ἀποστημάτων ταῦτα ὑποτίθεμαι. περὶ δὲ τοῦ ψάμμου τάδε. εἴκα ἤ τι συγκείμενον μέγεθος ἐκ τοῦ ψάμμου, μὴ μεῖζον μάκωνος, τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ μὴ μείζονα εἶμεν μυρίων, καὶ τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν ἢ τέτρωκον τὸ μόριον δακτύλου. ὑποτίθεμαι δὲ τόδε, ἐπισκεψάμενος τὸν δὲ τὸν τρόπον. ἐτέθην ἐπὶ κανόνα λεῖον μάκωνας ἐπ' εὐθείας ἐπὶ μίαν κείμενας, ἁπτομένας ἀλλάλων. καὶ ἀνέλαβον αἱ κε μάκωνες πλέονα τόπον δακτυλιαίου μάκεος. ἐλάσσονα ἐθεὶς τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος, ὑποτίθεμαι ὡς τετρακοστομόριον εἶμεν δακτύλου, καὶ μὴ ἐλάσσονα βουλόμενος καὶ διὰ τούτων ἀναμφιλογώτατον δείκνυσθαι τὸ προκείμενον. ἃ μὲν οὖν ὑποτίθεμαι, ταῦτα. χρήσιμον δὲ εἶμεν ὑπολαμβάνω τὰν κατονόμαξιν τῶν ἀριθμῶν ῥηθῆμεν, ὅπως καὶ τῶν ἄλλων οἷς τῷ βιβλίῳ μὴ περιτετυχήκαντι τὸ ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένῳ μὴ πλανῶνται, διὰ τὸ μηδὲν εἶμεν

ὑπὲρ αὐτᾶς ἐν τῷδε τῷ βιβλίῳ περιειρημένων. συμβαίνει δὲ τὰ ὀνόματα τῶν ἀριθμῶν εἰς τὰ μὲν τῶν μυρίων ὑπάρχειν ἁμῖν παραδεδομένα, καὶ ὑπὲρ τῶν μυρίων μὲν ἀποχρεόντως γιγνώσκομεν, μυριάδων ἀριθμὸν λέγοντες εἰς τὰς ποτὶ τὰς μυριάδας. ἔστω οὖν ἁμῖν, οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ εἰς τὰν μυρίαν μυριάδων πρῶτοι καλούμενοι. τῶν δὲ πρώτων ἀριθμῶν αἱ μυρίαι μυριάδες μονὰς καλείσθω δευτέρων καὶ ἀριθμῶν τῶν δευτέρων μονάδες, καὶ ἐκ τᾶν μονάδων δεκάδες, καὶ ἑκατοντάδες καὶ χιλιάδες, καὶ μυριάδες ἔστε μυρίων μυριάδων. πάλιν δὲ καὶ αἱ μύριαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, μονὰς καλείσθω τρίτων ἀριθμῶν, καὶ ἀριθμείσθω τῶν τριῶν ἀριθμῶν μονάδες καὶ αἱ ἀπὸ τᾶν μονάδων δεκάδες, καὶ ἑκατοντάδες, καὶ χιλιάδες, καὶ μυριάδες, ἔστε μυρίαι μυριάδες. τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ τῶν τρίτων ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες μονὰς καλείσθω τετάρτων ἀριθμῶν, καὶ αἱ τῶν τετάρτων ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες μονὰς καλείσθω πέμπτων ἀριθμῶν, καὶ ἀεὶ οὕτως προάγοντες οἱ ἀριθμοὶ τὰ ὀνόματα ἔχοντες ἔστε μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. ἀποχρέοντι μὲν οὖν καὶ ἀπὸ τοσούτων οἱ ἀριθμοὶ γιγνωσκόμενοι. ἔξεστι δὲ καὶ ἐπὶ πλέον προάγειν. ἔστων γὰρ οἱ μὲν νῦν εἰρημένοι ἀριθμοὶ πρώτας περιόδου καλούμενοι, ὁ δὲ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς περιόδου μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ αἱ μυρίαι μυριάδες τᾶς δευτέρας περιόδου δευτέρων ἀριθμῶν. ὁμοίως δὲ καὶ τούτων ὁ ἔσχατος μονὰς καλείσθω δευτέρας περιόδου τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἀεὶ οὕτως οἱ ἀριθμοὶ προάγοντες, τὰ ὀνόματα ἐχόντων τᾶς δευτέρας περιόδου ἔστε μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. πάλιν δὲ καὶ ὁ ἔσχατος ἀριθμὸς τᾶς δευτέρας περιόδου μονὰς καλείσθω τρίτας περιόδου πρώτων ἀριθμῶν. καὶ ἀεὶ οὕτως προαγόντων ἔστε μυριακισμυριοστᾶς περιόδου μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίαι μυριάδες. τούτων δὲ οὕτως κατωνομασμένων, εἴκα ἐῶντι ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἑξῆς κείμενοι, ὁ δὲ παρὰ τὰν μονάδα δεκὰς ᾖ, οἱ ὀκτὼ ἐξ αὐτῶν, οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων ἀριθμῶν καλουμένων ἐσσοῦνται. οἱ δὲ μετ᾽ αὐτοὺς ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων καλούμενοι, καὶ οἱ ἄλλοι τὸν αὐτὸν τρόπον τούτοις τῶν συνωνύμων καλουμένων ἐσσοῦνται ἀποστάσει τᾶς ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν. ἁ μὲν οὖν πρώτας ὀκτάδος τῶν ἀριθμῶν ὄγδοος ἐστὶν ἀριθμὸς χίλιαι μυριάδες. τᾶς δὲ δευτέρας ὀκτάδος ὁ πρῶτος, ἐπεὶ δεκαπλάσιόν ἐστι τοῦ πρὸ αὐτοῦ μυρίαι μυριάδες ἐσσεῖται. οὗτος δέ ἐστι μονὰς τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ὁ δὲ ὄγδοος τᾶς δευτέρας ὀκτάδος ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ τᾶς τρίτας ὀκτάδος, ὁ πρῶτος. ἐπεὶ δεκαπλάσιόν ἐστι τοῦ πρὸ αὐτοῦ μυρίαι μυριάδες ἐσσεῖται τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. οὗτος δέ ἐστι μονὰς τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν δὲ, ὅτι πολλαὶ ὀκτάδες ἐσσοῦντι ὡς εἴρηται. χρήσιμον δέ ἐστι καὶ τόδε γιγνωσκόμενον, εἴκα ἀριθμῶν ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀνάλογον ἐόντων πολλαπλασιάζοντες τινὲς ἀλλάλους τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, ὅταν ὁμοίως ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπέχων. ἀπὸ μὲν οὖν τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους, ὅσους ὁ ἐλάσσων τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἀπέχει. ἀπὸ δὲ τᾶς μονάδος ἀφέξει ἑνὶ ἐλάσσονας, ἢ ὅσος ἐστὶν ἀριθμὸς συναμφοτέρων, ὡς ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. ἔστων γὰρ ἀριθμοί τινες ἀνὰ λόγον ἀπὸ μονάδος, οἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ. μονὰς δὲ ἔστω ὁ α, καὶ πεπολλαπλασιάσθω ὁ δ τοῦ θ. ὁ δὲ γενόμενος ἔστω ὁ χ λ. εἰλήφθω δὴ ὁ θ ἐκ τᾶς ἀναλογίας ὁ λ, ἀπέχων ἀπὸ τοῦ θ τοσούτους, ὅσους ὁ δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. δεικτέον ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ χ τῷ λ. ἐπεὶ οὖν ἀνάλογον ἐόντων ἴσον ἴσους ἀπέχει ὅτι δ ἀπὸ τοῦ α, καὶ ὁ λ ἀπὸ τοῦ θ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ὁ δ ποτὶ τὸν α, ὃν ὁ λ ποτὶ τὸν θ. πολλαπλάσιον δέ ἐστιν ὁ δ τοῦ α, τοῦ δ. πολλαπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ λ τοῦ θ τοῦ δ. ὥστε ἴσος ἐστὶν ὁ λ τῷ χ. δῆλον οὖν ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς ἀναλογίας τέ ἐστι καὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος τῶν πολλαπλασιαξάντων ἀλλάλους ἴσον ἀπέχων, ὅσους ὁ ἐλάσσων ἀπὸ τᾶς μονάδος ἀπέχει. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει ἑνὶ ἐλάσσονας ἢ ὅσος ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς συναμφοτέρων οὓς ἀπέχοντι ἀπὸ τᾶς μονάδος. οἱ δὲ μὲν γὰρ οἱ α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, τοσοῦτοί ἐντι ὅσους ὁ θ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει, οἱ δὲ ι κ λ ἑνὶ ἐλάσσονες, ἢ ὅσους ὁ δ ἀπὸ μονάδος ἀπέχει. σὺν γὰρ τῷ θ, τοσοῦτοί ἐντι.

Τούτων δὲ τῶν μὲν ὑποκειμένων, τῶν δὲ ἀποδεδειγμένων τὸ προκείμενον δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν διάμετρον τᾶς μάκωνος μὴ ἐλάσσονα εἶμεν ἢ τετρακοσιομόριον δακτύλου, δῆλον ὡς ἁ σφαῖρα δακτυλιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον, οὐ μείζων ἐστὶν ἢ ὥστε χωρεῖν μάκωνας ἑξακισμυρίας καὶ τετρακισχιλίας. τᾶς γὰρ σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον τετρακοσιομόριον δακτύλου πολλαπλασία ἐστὶ τοῦ εἰρημένου ἀριθμοῦ. δέδεικται γὰρ ὅτι αἱ σφαῖραι τριπλάσιον λόγον ἔχοντι ποτὶ ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν, εἰς τὸ τᾶς μάκωνος μέγεθος, μὴ μεῖζον εἶμεν μυρίων. δῆλον ὡς εἰ πληρωθείη ψάμμου ἁ σφαῖρα ἁ δακτυλιαία

ἔχουσα

ἔχουσα τὰν διάμετρον, ὃ μεῖζον κα εἴη ὁ ἀριθμὸς τοῦ ψάμμου ἢ μυριάκις τὰ ἑξακισμύρια καὶ τετρακισχίλια. οὗτος δέ ἐστιν ὁ ἀριθμός, μονάδες ι' ἀριθμοὶ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν, καὶ τῶν πρώτων μυριάδες τετρακισχίλιαι. ἐλάσσων οὖν ἐστιν ἢ ι' μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν ρ' δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς δακτυλιαίας ἐχούσας τὰν διάμετρον ἢ ἐφ ταῖς ρ' μυριάδεσσι, διὰ τὸ τριπλάσιον ἔχειν ποτ' ἀλλάλας τὰν διάμετρον τᾶς σφαίρας. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον δακτύλων ρ', δῆλον ὡς ἐλάττων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθέντος τῶν δεκαμοναδῶν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ' μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δὲ τῶν δευτέρων ἀριθμῶν δέκα μονάδες, δέκατος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐόντων τῶν δέκα πλευρῶν ὅρων ἀνάλογον. αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἕκτος ἐσσεῖται τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἑκκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος. δέδεικται γὰρ ὅτι ἐν ἐλάσσονας ἀπὸ τᾶς μονάδος ἕκαστος ἐστὶν ἐλάττων συναμφοτέρων δὲ ὅσοις ἀπέχοντι ἀπὸ μονάδος οἱ πολλαπλασιάξαντες ἀλλάλους. τῶν δὲ ἑκκαίδεκα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρᾶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ ὁ ἔσχατος ἐστὶν αὐτῶν χίλιαι μυριάδες ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τε τὰν διάμετρον ρ' δακτύλων ἐχούσῃ, ἐλάττων ἐστὶν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν δευτέρων ἀριθμῶν. πάλιν δὲ καὶ ἁ σφαῖρα, ἁ τῶν μυρίων δακτύλων ἔχουσα τὰν διάμετρον πολλαπλασία τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον ρ' δακτύλων ταῖς ρ' μυριάδεσσι. ἁ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ ἔχουσα σφαῖρα τὰν διάμετρον μυριάδων δακτύλων, δῆλον ὡς ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου πολλαπλασιασθεισᾶν ταῖν χιλιᾶν μυριάδων τῶν δευτέρων ἀριθμῶν ταῖς ρ' μυριάδεσσιν. ἐπειδὴ αἱ μὲν τῶν δευτέρων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες ἑκκαιδέκατος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος, ἀναλογίας δὲ ρ' μυριάδες ἕβδομος, ἀπὸ μονάδος ἐν τᾷ αὐτᾷ ἀναλογίᾳ, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δύο καὶ εἰκοστὸς τῶν ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ δύο καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐστίν. ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τούτους δευτέρων καλουμένων. οἱ δὲ λοιποὶ ἐκ τῶν τριῶν καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθους ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ μυρίων δακτύλων, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ι' μυριάδες τρίτων ἀριθμῶν. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἁ σταδιαίαν ἔχουσα τὰν διάμετρον σφαῖρα, τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον μυρίων δακτύλων, δῆλον ὅτι καὶ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδιαίαν, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ι' μυριάδες τῶν τρίτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ' σταδίων, πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδιαίαν ταῖς ρ' μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἔχουσα τὰν διάμετρον ρ' σταδίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ, πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν δέκα μυριάδων τρίτων ἀριθμῶν ταῖς ρ' μυριάδεσσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τοῦ τρίτου ἀριθμῶν δέκα μυριάδες δύο καὶ εἰκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ' μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ὀκτὼ καὶ εἰκοστὸς ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ ὀκτὼ καὶ εἴκοσι τούτων, ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν τετάρτων καλουμένων, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν τετάρτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μεγέθεος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ', ἔλασσόν ἐστιν ἢ χίλιαι μονάδες. τῶν δὲ τετάρτων ἀριθμῶν, πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον μυρίων σταδίων, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ', ταῖς ρ' μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαύτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυρίων, δῆλον ὅτι ἐλάσσων ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασιασθεισᾶν τᾶν χιλιᾶν μονάδων τῶν τετάρτων ἀριθμῶν ταῖς ρ' μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τῶν τετάρτων ἀριθμῶν χίλιαι μονάδες ὀκτὼ καὶ εἰκοστός ἐστιν, ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον. αἱ δὲ ἑκατὸν μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, τέταρτος καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσάρων καὶ τριάκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν

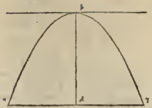
τετάρτων. οἱ δὲ λοιποὶ δύο τῶν πέμπτων καλουμένων ἐσσοῦνται. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ δέκα μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυρίων, ἔλασσον ἐσσεῖται ἢ ι μονάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. πάλιν δὴ ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ μυριάδων πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς τὰν διάμετρον ἐχούσας σταδίων μυρίων, ταῖς ρ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαῦτα, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων ρ μυριάδων, δῆλον ὡς ἔλασσον ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίας θεῖσαν. τᾶν δὲ μονάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ μυριάσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν δέκα μονάδες, τέταρτος ἐστὶ καὶ τριακοστὸς ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας ἐσσεῖται τετρακοστὸς ἀπὸ μονάδος, τῶν δὲ τεσσαράκοντα τούτων ὀκτὼ μὲν οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί. οἱ δὲ μετὰ ταῦτα ἄλλοι ὀκτὼ τῶν δευτέρων. καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων. οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ὀκτὼ τῶν τετάρτων. οἱ δὲ μετὰ τούτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων καλουμένων. καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων ρ μυριάδες, ἔλασσον ἐστὶν ἢ χίλιαι μυριάδες τῶν πέμπτων ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριὰς μυριάδων πολλαπλασίων ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων ρ μυριάδων ταῖς ρ μυριάδεσσιν. εἰ δὲ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριὰς μυριάδων, φανερὸν ὅτι ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλάσιον χιλίων μυριάδων τῶν πέμπτων ἀριθμῶν ταῖς ρ μυριάδεσσιν. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τῶν πέμπτων ἀριθμῶν χίλιαι μυριάδες τετρακοστὸς ἐστὶν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὡς ὁ γενόμενος ἐσσεῖται ἕκτος καὶ τετρακοστὸς ἀπὸ μονάδος. τῶν δὲ τεσσαράκοντα καὶ ἓξ τούτων οἱ μὲν, οἱ πρῶτοι σὺν τᾷ μονάδι τῶν πρώτων καλουμένων ἐντί, ὀκτὼ δὲ οἱ μετὰ τοὺς τῶν δευτέρων, καὶ οἱ μετὰ τούτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τρίτων, οἱ δὲ μετὰ τοὺς τρίτους ἄλλοι ὀκτὼ τῶν τετάρτων, καὶ οἱ μετὰ τοὺς τετάρτους ὀκτὼ τῶν πέμπτων, οἱ δὲ λοιποὶ τῶν ἑκτῶν καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ ι μυριάδων τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν, ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων μυρίων ἔλασσον ἐστὶν ἢ ι μυριάδες τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν. ἁ δὲ τὰν διάμετρον ἔχουσα σφαῖρα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ, πολλαπλασία ἐστὶ τᾶς σφαίρας τᾶς ἐχούσας τὰν διάμετρον σταδίων μυριάδας μυρίας, ταῖς ρ μυριάδεσσιν. εἰ οὖν γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα τηλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκα ἐστὶν ἁ σφαῖρα ἁ ἔχουσα τὰν διάμετρον σταδίων μυριάκις μυριάδων, φανερὸν ὅτι τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος ἔλασσον ἐσσεῖται τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίων τᾶν ι μυριάδων, τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν ταῖν ρ μυριάδες. ἐπεὶ δὲ αἱ μὲν τῶν ἑκτῶν ἀριθμῶν δέκα μυριάδες ἕκτος καὶ τεσσαρακοστὸς ἐστὶν ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον, αἱ δὲ ρ μυριάδες ἕβδομος ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας, δῆλον ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται δύο καὶ πεντηκοστὸς ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. τῶν δὲ δύο καὶ πεντήκοντα τούτων, οἱ μὲν ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα σὺν τᾷ μονάδι, οἵ τε πρῶτοι καλούμενοι ἐντὶ καὶ οἱ δεύτεροι καὶ τρίτοι καὶ τέταρτοι καὶ πέμπτοι καὶ ἕκτοι. οἱ δὲ λοιποὶ τέσσαρες τῶν ἑβδόμων καλουμένων ἐντί, καὶ ὁ ἔσχατος αὐτῶν ἐστὶ χίλιαι μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. φανερὸν οὖν ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσα τᾷ σφαίρᾳ τᾷ τὰν διάμετρον ἐχούσᾳ σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ἁ τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάσσων ἐοῦσα σταδίων μυριάκις μυριάδων ρ, δῆλον ὅτι καὶ τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. ὅτι μὲν ὁμοίως τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν πλείστων ἀστρολόγων καλουμένῳ κόσμῳ, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν, δέδεικται. ὅτι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ σφαίρᾳ τηλικαύτᾳ, ἁλίκαν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, εἶμεν ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν, δειχθήσεται. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται τὰν γᾶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον ποτὶ τὸν ὑφ' ἁμῶν εἰρημένον κόσμον, ὃν ἔχει λόγον ὁ εἰρημένος κόσμος ποτὶ τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν, ἂν Ἀρίσταρχος ὑποτίθεται. καὶ αἱ διάμετροι τᾶν σφαιρᾶν τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ποτὶ ἀλλάλας. ἁ δὲ τοῦ κόσμου διάμετρος τᾶς διαμέτρου τᾶς γᾶς δέδεικται ἐλάσσων ἐοῦσα ἢ μυριοπλασίαν. δῆλον οὖν, ὅτι καὶ ἁ διάμετρος τᾶς τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαίρας

σφαίρας ἐλάσσων ἐστὶν ἢ μυριοπλασίων τᾶς διαμέτρου τοῦ κόσμου. ἐπειδὴ δὲ αἱ σφαῖραι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι ποτ' ἀλλάλας τᾶν διαμέτρων φανερόν, ὅτι ἁ τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖρα ἃν ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἐλάττων ἐστὶν ἢ μυριάκις μυριάδεσσι πολλαπλασίων τοῦ κόσμου. δέδεικται γὰρ τὸ τοῦ ψάμμου πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῷ κόσμῳ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ͵α μονάδες τῶν ἑβδόμων ἀριθμῶν. δῆλον οὖν ὅτι εἰ γένοιτο ἐκ τοῦ ψάμμου σφαῖρα ταλικαῦτα τὸ μέγεθος, ἁλίκαν ὁ ἀρίσταρχος ὑποτίθεται τὰν τῶν ἀπλανέων ἄστρων σφαῖραν εἶμεν, ἐλάσσων ἐσσεῖται ὁ τοῦ ψάμμου ἀριθμὸς τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ πολλαπλασίαν τᾶν χιλίων μονάδων, ταῖς μυριάκις μυρίαις μυριάδεσσι. καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν τῶν ἑβδόμων ͵α μονάδες δύο καὶ πεντηκοστός ἐστιν ἀπὸ μονάδος. ἀνάλογον δὲ μυριάκις μύριαι μυριάδες τρισκαιδέκατος ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας δῆλον, ὅτι ὁ γενόμενος ἐσσεῖται τέταρτος καὶ ἑξηκοστὸς ἀπὸ μονάδος, ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας. οὗτος δέ ἐστι τῶν ὀγδόων ὄγδοος καὶ πεντακισχίλιαι μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. φανερὸν τοίνυν, ὅτι τοῦ ψάμμου τὸ πλῆθος τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τῇ ἀπλανέων ἄστρων σφαίρᾳ ἃν ἀρίσταρχος ὑποτίθεται, ἔλασσον ἐστὶν ἢ ͵α μυριάδες τῶν ὀγδόων ἀριθμῶν. ταῦτα δὲ βασιλεῦ γέλων, τοῖς μὲν πολλοῖς καὶ μὴ κεκοινωνηκότεσσι τῶν μαθημάτων οὐκ εὔπιστα φανήσειν ὑπολαμβάνω, τοῖς δὲ μεταλελαβηκότεσσι καὶ περὶ τῶν ἀποστημάτων καὶ τῶν μεγεθέων τᾶς τε γᾶς καὶ τοῦ ἁλίου, καὶ τᾶς σελήνας καὶ τοῦ ὅλου κόσμου πεφροντικότεσσι πιστά, διὰ τὰν ἀπόδειξιν ἐσσεῖσθαι. διόπερ ᾠήθην καί τινας οὐκ ἀνάρμοστον ἔπ' ἔτι ἐπιθεωρῆται ταῦτα.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ.

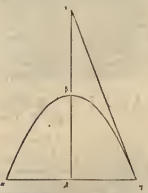
ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ ΔΟΣΙΘΕΩ ΕΥΠΡΑΤΤΕΙΝ.

Ἀκούσας Κόνωνα μὲν τετελευτηκέναι, ὃς ἦν οὐκ ἐλλείπων ἁμῖν ἐν φιλίᾳ, τὶν δὲ Κόνωνος γνώριμον γεγενῆσθαι καὶ γεωμετρίας οἰκεῖον εἶμεν, τοῦ μὲν τετελευτηκότος εἵνεκεν ἐμπλήσθημεν, ὡς καὶ φίλου τοῦ ἀνδρὸς γενομένου, καὶ ἐν τοῖς μαθήμασι θαυμαστοῦ τινος. ἐπεχειρίξαμεθα δὲ ἀποστεῖλαι, γράψαντες ὡς Κόνωνι γράφειν ἐγνωκότες εἶμεν γεωμετρικῶν θεωρημάτων, ὃ πρότερον μὲν οὐκ ἦν τεθεωρημένον. νῦν δὲ ὑφ' ὑμῶν τεθεώρηται, πρότερον μὲν διὰ μηχανικῶν εὑρεθέν, ἔπειτα δὲ καὶ διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἐπιδειχθέν, τῶν μὲν πρότερον περὶ γεωμετρίαν πραγματευθέντων ἐπεχείρησαν τινὲς γράφειν, ὡς δυνατὸν ἐὸν κύκλῳ τῷ δοθέντι, καὶ κύκλου τμήματι τῷ δοθέντι χωρίον εὑρεῖν εὐθύγραμμον ἴσον. καὶ μετὰ ταῦτα τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τᾶς ὅλου τοῦ κώνου τομᾶς καὶ εὐθείας τετραγωνίζειν ἐπειρῶντο, λαμβάνοντες οὐκ εὐπαραχώρητα λήμματα, ὅπερ αὐτοῖς ὑπὸ τῶν πλείστων οὐκ εὑρισκόμενα ταῦτα κατεγνώσθη, τὸ καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τμῆμα περιεχόμενον, οὐδένα τῶν πρώτων ἐγχειρήσαντα τετραγωνίζειν ἐπιστάμεθα, ὃ δὴ νῦν ὑφ' ὑμῶν εὕρηται. δείκνυται γὰρ ὅτι πᾶν τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτάν, καὶ ὕψος ἴσον τῷ τμήματι, λαμβανομένου τοῦ δὲ τοῦ λήμματος εἰς τὰν ἀπόδειξιν αὐτοῦ, τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου. κέχρηνται δὲ καὶ οἱ πρότερον γεωμέτραι τῷδε τῷ λήμματι. τούς τε γὰρ κύκλους διπλασίονα λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλους τῶν διαμέτρων ἀποδεδείχασιν αὐτῷ τῷ λήμματι χρώμενοι. καὶ τὰς σφαίρας ὅτι τριπλασίονα λόγον ἔχοντι πρὸς ἀλλήλας τᾶν διαμέτρων. ἔτι δὲ καὶ πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τᾷ πυραμίδι, καὶ ὕψος ἴσον. καὶ διότι πᾶς κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντος τῷ κώνῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ὁμοίως τῷ προκειμένῳ λήμματι λαμβάνοντες ἔγραφον. συμβαίνει τῶν προειρημένων θεωρημάτων ἕκαστον μηδενὸς ἧσσον τοῦ τούτου λήμματος, ἀποδεδειγμένων πεπιστευκέναι, ἄρτι δὲ εἰς τὰν ὁμοίαν πίστιν τούτου ἀναγμένον τῶν ὑφ' ἡμῶν ἐκδιδομένων. ἀναγράψαντες οὖν αὐτοῦ τὰς ἀποδείξεις, ἀποστέλλομεν πρῶτον μέν, ὡς διὰ τῶν μηχανικῶν ἐθεωρήθη. μετὰ ταῦτα δὲ καὶ ὡς διὰ τῶν γεωμετρουμένων ἀποδείκνυται. προγράφεται δὲ καὶ στοιχεῖα κωνικὰ χρείαν ἔχοντα εἰς τὰν ἀπόδειξιν. ἔρρωσο.

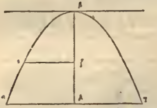


α Ἔστω ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ Β γ, ἡ δὲ ἁ μὲν Β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ διάμετρος. ἁ δὲ α δ γ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β, ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ Β, ἐσσοῦνται αἱ α δ, δ γ ἴσαι.

β Ἔστω ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α Β, ἡ δὲ ἁ Β δ παρὰ τὰν διάμετρον, ἢ αὐτὰ διάμετρος, ἁ δὲ α δ γ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς, καὶ ἁ γ ε τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς ἐπιψαύουσα κατὰ τὸ γ, ἐσσοῦνται αἱ δ Β, Β ε ἴσαι.



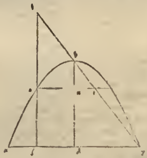
γ Ἔστω ἡ ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α Β, ἡ δὲ Β δ παρὰ τὰν διάμετρον ἢ αὐτὰ ἁ διάμετρος, καὶ ἄχθωσι τινὲς αἱ α δ, ε ζ παρὰ τὰν κατὰ τὸ Β ἐπιψαύουσαν τᾶς τοῦ



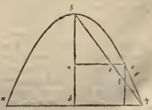
κώνου τομᾶς, ἐσσεῖται ὡς ἁ Β δ μάκει ποτὶ τὰν Β ζ, οὕτως δυνάμει ἁ α δ ποτὶ τὰν ε ζ, ἀποδέδεικται δὲ ταῦτα ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις.

δ Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τὸ α Β γ. ἁ δὲ Β δ ἀπὸ μέσας τᾶς α γ παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθω, ἢ αὐτὰ διάμετρος ἔστω, καὶ ἁ Β γ εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐκβεβλήσθω. εἰ δή κα ταχθείη τις ἄλλα ἁ ζ θ παρὰ τὰν Β δ τέμνουσαν, τὰν δὲ τῶν α γ εὐθειᾶν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ἁ ζ θ ποτὶ τὰν θ κ, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν δ ζ. ἄχθω γὰρ διὰ τοῦ κ παρὰ τὰν α γ ἁ κ ε. ἐστὶν ἄρα ὡς ἁ Β δ ποτὶ τὰν Β κ μάκει, οὕτως ἁ δ γ ποτὶ τὰν κ ε δυνάμει. ἀποδέδεικται γὰρ τοῦτο. ἐσσεῖται ἄρα ὡς ἁ Β γ ποτὶ τὰν Β ε μάκει, οὕτως ἁ Β γ ποτὶ τὰν Β θ δυνάμει. ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ Β γ ποτὶ τὰν Β θ, ὃν ἁ γ θ ποτὶ τὰν θ ι. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ γ δ ποτὶ τὰν δ ζ οὕτως ἁ θ ζ ποτὶ τὰν θ κ. τᾷ δὲ δ γ ἴσα ἐστὶν ἁ δ α. δῆλον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ δ α ποτὶ τὰν δ ζ, ὃν ἁ ζ θ ποτὶ τὰν θ κ.

τέμνουσα ἑκατέ ραν τῶν α γ β εὐθειῶν

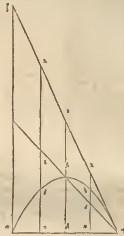


ε Ἔστω τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τὸ α Β γ. καὶ ἄχθω ἀπὸ τοῦ α παρὰ τὰν διάμετρον ἁ ζ α, ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς

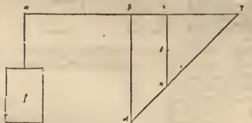


κατὰ

κατὰ τὸ γ, ἁ γ ζ. εἰ δή τις ἀχθείη ἐν τῷ ζ α γ τριγώνῳ παρὰ τὰν α ζ, τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ἀχθεῖσα τετμάσεται ὑπὸ τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἁ α γ ὑπὸ τᾶς ἀχθείσας (ἀνάλογον) ὁμόλογον δὲ ἐσσεῖται τὸ τμᾶμα τᾶς α γ ποτὶ τῷ α, τῷ τμάματι τᾶς ἀχθείσας τῷ ποτὶ τᾷ α. ἄχθω γάρ τις ἁ δ ε παρὰ τὰν α ζ. καὶ τεμνέτω πρῶτον ἁ δ ε τὰν α γ δίχα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὀρθογωνίου κώνου τομὰ ἁ α β γ, καὶ ἀγμένα ἁ β δ παρὰ τὰν διάμετρον. αἱ δὲ α δ, δ γ ἴσαι, ἐσσεῖται τᾷ α γ παράλληλος ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. πάλιν ἐπεὶ παρὰ τὰν διάμετρόν ἐστιν ἁ δ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γ ε, ἅπτεται ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἁ δὲ δ γ παράλληλος τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαυούσᾳ, ἴσα ἐστὶν ἁ ε β τᾷ β δ. ὥστε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ α δ ποτὶ τὰν δ γ, ὃν ἁ δ β ποτὶ τὰν β ε. εἰ μὲν οὖν δίχα τέμνει ἁ ἀχθεῖσα τὰν α γ, δέδεικται. εἰ δὲ μή, ἄχθω τις ἄλλα ἁ κ λ παρὰ τὰν α ζ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ α κ ποτὶ τὸν κ γ, ὃν ἁ κ θ ποτὶ τὰν θ λ. ἐπεὶ γὰρ ἴσα ἐστὶν ἁ β ε τᾷ β δ, ἴσα ἐστὶ καὶ ἁ ι λ τᾷ κ ι, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει ποτὶ τὰν κ ι, ὃν ἁ α γ ποτὶ τὰν δ α. ἔχει δὲ καὶ ἁ κ ι ποτὶ τὰν θ κ τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἁ δ α ποτὶ τὰν α κ. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ πρότερον, ὡς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἁ κ θ ποτὶ τὰν θ λ, ὃν ἁ α κ ποτὶ τὰν κ γ. δέδεικται οὖν τὸ προτεθέν.

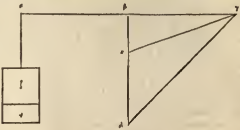


Νοείσθω δὲ τό, ὅτι δεῖ τὸ ἐν τῇ θεωρίᾳ προκείμενον ὁρώμενον εἶναι ὀρθοῦ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα καὶ τᾶς α β γραμμᾶς. ἔπειτα τὰ μὲν εἶναι τὰ αὐτὰ τῷ δ κάτω νοείσθω, τὰ δὲ εἶναι θάτερα ἄνω. τὸ δὲ β δ γ τρίγωνον ἔστω ὀρθογώνιον, ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τὰ β γωνίαν, καὶ τὰν β γ πλευρὰν ἴσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ, δῆλον ὅτι ἴσης οὔσης τᾶς α β τᾷ β γ. κρεμάσθω δὲ τὸ τρίγωνον ἐκ τῶν β γ σαμείων. κρεμάσθω δὲ καὶ ἄλλο χωρίον τὸ ζ ἐκ τοῦ ἑτέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α, κρεμάμενον τῷ β δ γ τριγώνῳ, οὕτως ἐόντι ὡς νῦν κεῖται. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ β δ γ τριγώνου μέρος τρίτον εἶν. ἐπεὶ γὰρ ὑπόκειται ἰσορροπεῖν ὁ ζυγός ἐστι κ, καὶ ἁ α γ γραμμὰ αὐτόν. ὁρίζονται δὲ ποτ' ὀρθὰς ἀγόμεναι τᾷ α γ ἐν τῷ ὀρθῷ ἐπιπέδῳ ποτὶ τὸν ὁρίζοντα, καθέξει ἐσσοῦνται ἐπὶ τὸν ὁρίζοντα. τετμάσθω δὴ ἁ β γ γραμμὰ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε διπλασίονα εἶμεν τὰν γ ε τᾶς ε β. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν δ β ἁ κ ε. καὶ τετμάσθω δίχα κατὰ τὸ θ. τοῦ δὴ β δ γ τριγώνου κέντρον βάρεος ἐστὶ τὸ θ σαμεῖον. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. εἴκα οὖν τοῦ β δ γ τριγώνου, ὁ μὲν κατὰ τὰ β γ κρέμασις λυθείη, κατὰ δὲ τὸ ε κρεμασθῇ, μένει τὸ τρίγωνον, ὡς νῦν ἔχει. ἕκαστον γὰρ τῶν κρεμαμένων ἐξ ὁ σαμείου κατασταθῇ μένει, ὥστε κατὰ κάθετον εἶμεν τό τε σαμεῖον τοῦ κρεμαστοῦ, καὶ τὸ κέντρον τοῦ βάρεος τοῦ κρεμαμένου. δέδεικται οὖν καὶ τοῦτο. ἐπεὶ οὖν τὰν αὐτὰν ἕξει κατάστασιν τὸ β γ δ τρίγωνον ποτὶ τὸν ζυγόν, ἰσορροπήσει ὁμοίως τὸ ζ χωρίον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπέοντι τὸ μὲν ζ κρεμάμενον κατὰ τὸ α, τὸ δὲ β δ γ κατὰ τὸ ε, δῆλον ὡς ἀντιπεπόνθει τοῖς μακεσι,



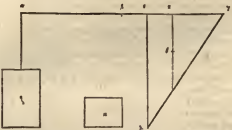
κεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, οὕτως τὸ β δ γ τρίγωνον ποτὶ τὸ ζ χωρίον. τριπλασία δέ ἐστιν ἁ α β τᾶς β ε. καὶ τὸ β δ γ ἄρα τρίγωνον τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ζ χωρίου. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ ὅκα τριπλάσιον ᾖ τὸ β δ γ τρίγωνον τοῦ ζ χωρίου, ὅτι ἰσορροπήσει.

ζ Ἔστω πάλιν ζυγὸς ἁ α γ γραμμά, μέσον δὲ αὐτᾶς ἔστω τὸ β, καὶ κρεμάσθω ἐπὶ τὸ β τὸ γ δ κ τρίγωνον. τὸ δὲ γ δ κ ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, βάσιν ἔχον τὰν δ κ, ὕψος δὲ τὰν ἴσαν ἐοῦσαν τᾷ ἡμισείᾳ τοῦ ζυγοῦ. καὶ κρεμάσθω τὸ δ γ κ τρίγωνον ἐκ τῶν β γ σαμείων, τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάμενον ἐπὶ τὸ α ἰσορροπὲς ἔστω τῷ γ δ κ τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὲ

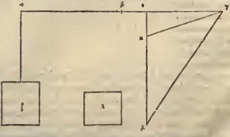


δειχθήσεται τὸ ζ χωρίον τρίτον μέρος τοῦ γ δ κ τριγώνου. κρεμάσθω γὰρ καὶ ἄλλο χωρίον ἐκ τοῦ α, τρίτον μέρος ἐὸν τοῦ β γ κ τριγώνου. ἰσορροπήσει δὲ τὸ β δ γ τρίγωνον τῷ ζ λ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν β γ κ τρίγωνον ἰσορροπεῖ τῷ α, τὸ δὲ β γ δ τῷ ζ λ, καὶ τρίτον ἐστὶ τοῦ β γ δ τὸ ζ λ, φανερὸν ὅτι καὶ τὸ γ δ κ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ.

η Ἔστω ζυγὸς ὁ α β, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. καὶ κρεμάσθω ἐπὶ τὸ β τὸ γ δ ε τρίγωνον ὀρθογώνιον, ὀρθὰν ἔχον τὰν ποτὶ τὰν ε γωνίαν. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ ἐπὶ τὰ γ ε. τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω ἐπὶ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ γ δ ε οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ ζ χωρίον τοῦ μὲν γ δ ε τριγώνου ἔλασσον εἶμεν, τοῦ δὲ κ μεῖζον. λελάφθω γὰρ τοῦ δ ε γ τριγώνου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος,



καὶ ἔστω τὸ θ. καὶ ἁ θ η ἄχθω παρὰ τὰν δ ε. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ γ δ ε τρίγωνον τῷ ζ χωρίῳ, τὸ αὐτὸ ἔχει λόγον τὸ γ δ ε χωρίον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ α β ποτὶ τὰν β η. ὥστε ἔλασσόν ἐστι τὸ ζ τοῦ γ δ ε. καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ μὲν τὸ ζ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἁ β α ποτὶ τὰν β η, ποτὶ δὲ τὸ κ, ὃν ἁ β α ποτὶ τὰν β ε, δῆλον ὡς μείζονα λόγον ἔχει τὸ γ δ ε τρίγωνον ποτὶ τὸ κ, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ ζ τοῦ κ.

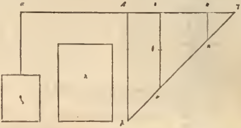


θ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α γ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ γ δ κ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, βάσιν μὲν ἔχον τὰν δ κ, ὕψος δὲ τὰν ε γ. καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ ἐπὶ τὰ γ, ε. τὸ δὲ ζ χωρίον κρεμάσθω

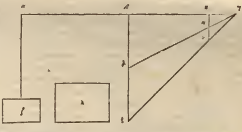
ἐπὶ

ἐπὶ τὸ α, καὶ ἰσορροπέτω τῷ δ ε κ τριγώνῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, τοῦτον ἐχέτω τὸ γ δ κ τρίγωνον ποτὶ τὸ λ. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ γ δ κ ἔλασσον. δειχθήσεται ὁμοίως τῷ πρότερον.

ι Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α β γ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ β δ η κ τραπέζιον, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς β, κ σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον. τὰν δὲ κ δ πλευράν, ἐπὶ τὸ γ νεύουσαν. καὶ ὃν ἔχει λόγον ἁ β α ποτὶ τὰν β κ, τοῦτον ἐχέτω τὸ β δ κ η τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ β δ η κ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ β, η σημεῖα. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπέτω τῷ β δ η κ τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον εἶμεν τοῦ λ. τετμάσθω γὰρ ἁ α γ κατὰ τὸ ε οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον ἁ διπλασία τᾶς δ β, καὶ ἁ κ η ποτὶ τὰν διπλασίαν τᾶς κ η, καὶ τᾶς β δ, τοῦτον ἔχειν τὰν ε η ποτὶ τὰν β ε. καὶ διὰ τοῦ ε παρὰ τὰν β δ ἀχθεῖσα ἁ ε ν τετμάσθω δίχα ἐπὶ τὸ θ, τοῦ δὴ β δ η κ τραπεζίου κέντρον ἐστὶ τοῦ βάρεος τὸ θ. δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς μηχανικοῖς. ἂν οὖν τὸ β δ η κ τραπέζιον ἐπὶ μὲν τὸ ε κρεμασθῇ, ἀπὸ δὲ τῶν β, η σημείων λυθέν, μένει τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, διὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ ἰσορροπήσει τῷ ζ χωρίῳ. ἐπεὶ οὖν ἰσορροπεῖ τὸ β δ η κ τραπέζιον κατὰ τὸ ε κρεμάμενον, τῷ ζ χωρίῳ ἐπὶ τὸ α κρεμαμένῳ, ἐσσεῖται ὡς ἁ β α ποτὶ τὰν β ε, τὸ β δ η κ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ χωρίον, μείζονα ἄρα λόγον ἔχει τὸ β δ η κ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ἤπερ ποτὶ τὸ λ. ἐπεὶ καὶ ἁ α β ποτὶ τὰν β ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ποτὶ τὰν β η. ὥστε ἔλασσον ἐσσεῖται τὸ ζ τοῦ λ.

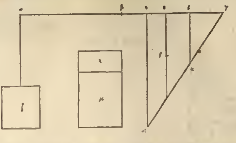


ια Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α γ ζύγιον, καὶ μέσον αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κ δ τ ρ τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν κ δ, τ ρ πλευρὰς ἔχον ἐπὶ τὸ γ νευούσας. τὰς δὲ δ ρ, κ τ καθέτους ἐπὶ τὰν β γ, καὶ ἁ δ ρ ἐπὶ τὸ β πιπτέτω. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β κ, τοῦτον ἐχέτω τὸ δ κ τ ρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ. τὸ δὲ δ κ τ ρ τραπέζιον κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ β, κ, καὶ τὸ ζ κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπέτω τὸ ζ τῷ δ κ ρ τ τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ἔλασσον τὸ ζ χωρίον τοῦ λ.

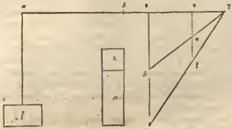


ιβ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν α γ ζύγιον, μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ δ ε κ η τραπέζιον ἔστω τὰς μὲν ποτὶ τοῖς ε, κ σημείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ κ δ, ε θ γραμμὰς ποτὶ τὸ γ νευούσας. καὶ ὃν μὲν λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β κ, τοῦτον ἐχέτω τὸ δ κ ε η τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ α β ποτὶ τὰν β ε, τοῦτον τὸν λόγον ἐχέτω τὸ δ κ ε η τραπέζιον, ποτὶ τὸ λ. κεκρεμάσθω δὲ τὸ δ κ ε η τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, κ. τὸ δὲ ζ χωρίον ἐκκρεμάσθω κατὰ τὸ α, καὶ ἰσορροπέτω τῷ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν ὑπόκειται. φαμὶ δὴ τὸ ζ τοῦ λ μεῖζον εἶμεν, τοῦ δὲ μ ἔλασσον. ἔλαβον γὰρ τοῦ δ κ ε η τραπεζίου τὸ κέντρον τοῦ βάρεος. ἔστω δὲ τὸ θ. λαφθήσεται δὲ ὁμοί-

ὡς τῷ πρότερον. καὶ ἄγω ταὶ θι παρὰ τὰν δε. αἰ οὖν τὸ τραπέζιον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμασθήσεται κατὰ τὸ ι, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, ἀπολυθῇ. μενεῖ τὰν αὐτὰν ἔχον κατάστασιν, καὶ ἰσορροπήσει τῷ ζ, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ἐπεὶ δὲ ἰσορροπεῖ τὸ τραπέζιον κρεμάμενον κατὰ τὸ ι, τῷ ζ κρεμαμένῳ κατὰ τὸ α, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον τὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ, ὃν ἁ αβ ποτὶ τὰν βι. δῆλον οὖν, ὅτι τὸ δκεη ποτὶ μὲν τὸ λ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ποτὶ τὸ ζ. ποτὶ δὲ τὸ μ ἐλάσσονα ἢ ποτὶ τὸ ζ. ὥστε τὸ ζ, τοῦ μὲν λ μεῖζον ἐστὶ, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.



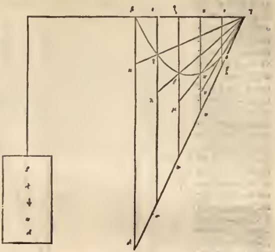
ιγ Ἔστω πάλιν τὸ μὲν αγ ζύγιον, κατὰ μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ β. τὸ δὲ κδ, τρ τραπέζιον. ὥστε τὰς μὲν κδ, τρ πλευρὰς νευούσας ἀμὲν ἐπὶ τὸ γ. τὰς δὲ δτ, κρ καθέτους ἐπὶ τὰν βγ. κεκρεμάσθω δὲ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ ε, η. τὸ δὲ ζ χωρίον κεκρεμάσθω κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τῷ δκτρ τραπεζίῳ οὕτως ἔχοντι, ὡς νῦν κεῖται. καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἁ αβ ποτὶ τὰν βε, τοῦτον ἐχέτω τὸ δκτρ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ χωρίον. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ αβ ποτὶ τὰν βη, τοῦτον ἐχέτω τὸ αὐτὸ τραπέζιον ποτὶ τὸ μ. ὁμοίως δὴ τῷ πρότερον δειχθήσεται τὸ ζ τοῦ μὲν λ μεῖζον, τοῦ δὲ μ ἔλασσον.



ιδ Ἔστω τμᾶμα τὸ βθγ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. ἔστω δὴ πρῶτον ἁ βγ πρὸς ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ. καὶ ἄχθω ἀπὸ μὲν τοῦ β σαμείου ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐσσεῖται δὴ τὸ βγδ τρίγωνον ὀρθογώνιον. διῃρήσθω δὴ ἁ βγ εἰς τμάματα ὁποσαοῦν ἴσα τὰ βε, εζ, ζη, ηι, καὶ ἀπὸ τᾶν τομᾶν ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον αἱ εσ, ζτ, ηυ, ιξ. ἀπὸ δὲ τῶν σαμείων καθ' ἃ τέμνουσιν αὗται τὰν τοῦ κώνου τομὰν, ἐπιζεύχθωσαν κατὰ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ τὸ τρίγωνον τὸ βδγ, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν κε, λζ, μη, νι, καὶ τοῦ ξιγ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ τραπεζίων τῶν ζφ, ηθ, ιπ, καὶ τοῦ ιογ τριγωνίου, μεῖζον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. διήχθω γὰρ εὐθεῖα, ἡ αβ. καὶ ἀπολελάφθω ἁ αβ ἴσα τᾷ βγ. καὶ νοείσθω ζύγιον τὸ αγ. μέσον δὲ αὐτοῦ ἐσσεῖται τὸ β, καὶ κεκρεμάσθω ἐκ τοῦ β. κεκρεμάσθω δὲ καὶ τὸ βδγ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ βγ. ἐκ δὲ τοῦ θατέρου μέρεος ζυγοῦ κεκρεμάσθω τὰ ρχψωδ χωρία κατὰ τὸ α. καὶ ἰσορροπείτω τὸ μὲν ρ χωρίον τῷ δε τραπεζίῳ, οὕτως ἔχοντι. τὸ δὲ χ τοῦ ζσ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τοῦ θη. τὸ δὲ ω τοῦ νι. τὸ δὲ δ τοῦ ξιγ τριγώνου. ἰσορροπήσει δὴ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ. ὥστε τριπλάσιον ἂν εἴη τὸ βδγ τρίγωνον τοῦ ρχψωδ χωρίου. καὶ ἐπεί ἐστι τμᾶμα τὸ βγθ, ὃ περιέχεται ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ β παρὰ τὰν διάμετρον ἦκται ἁ βδ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἦκται δέ τις καὶ ἄλλα παρὰ τὰν διάμετρον ἁ σε. τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἁ βγ ποτὶ τὰν βε, ὃν ἁ σε ποτὶ τὰν εφ. ὥστε καὶ ἁ βα ποτὶ τὰν βε τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν τὸ δε τραπέζιον ποτὶ τὸ κε. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ἁ αβ ποτὶ τὰν βζ τὸν αὐτὸν ἔ-

χειν

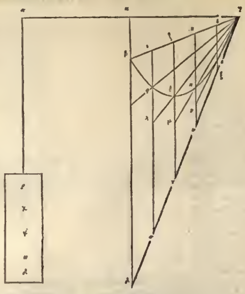
χειν λόγον, ὃν τὸ σ ζ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ ζ. ποτὶ δὲ τὰν β κ, ὃν τὸ τ κ ποτὶ τὸ μ κ. ποτὶ δὲ τὰν β ι, ὃν τὸ υ ι ποτὶ τὸ ν ι. ἐπεὶ οὖν ἐστι τραπέζιον τὸ δ ε, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς β ε σαμείοις γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰς δὲ πλευρὰς ἐπὶ τὸ γ νευούσας. ἰσορροπεῖ δέ τι χωρίον αὐτῷ τὸ ρ, κρεμάμενον ἐκ τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὸ α, οὕτως ἔχοντος τοῦ τραπεζίου, ὡς νῦν κεῖται. καὶ ἐστὶν ὡς ἁ β α ποτὶ τὰν β ε, οὕτως τὸ δ ε τραπέζιον ποτὶ τὸ κ ε, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ κ ε χωρίον τοῦ ρ χωρίου. δέδεικται γὰρ τοῦτο. πάλιν δὲ καὶ τὸ ζ σ τραπέζιον, τὰς μὲν ποτὶ τοῖς ζ ε γωνίας ὀρθὰς ἔχον, τὰν δὲ σ τ νεύουσαν ἐπὶ τὸ γ. ἰσορροπεῖ δὲ αὐτῷ χωρίον τὸ χ ἐκ τοῦ ζυγοῦ κρεμάμενον κατὰ



τὸ α, οὕτως ἔχοντι τῷ τραπεζίῳ ὡς νῦν κεῖται. καὶ ἐστὶν, ὡς μὲν ἁ β α ποτὶ τὰν β ε, οὕτως τὸ ζ σ τραπέζιον ποτὶ τὸ ζ φ. ὡς δὲ ἁ α β ποτὶ τὰν β ζ, οὕτως τὸ ζ σ τραπέζιον ποτὶ τὸ λ ζ. εἴη αὖ καὶ τὸ χ χωρίον τοῦ μὲν λ ζ τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ ζ φ μεῖζον. δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ψ χωρίον τοῦ μὲν μ η τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ θ η μεῖζον. καὶ τὸ ω χωρίον τοῦ μὲν ν ο ι η τραπεζίου ἔλασσον, τοῦ δὲ π ι μεῖζον. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δ χωρίον τοῦ μὲν ξ ι γ τριγώνου ἔλασσον, τοῦ δὲ γ ι ο μεῖζον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν κ ε τραπέζιον μεῖζόν ἐστι τοῦ ρ χωρίου, τὸ δὲ λ ζ τοῦ χ, τὸ δὲ μ η τοῦ ψ, τὸ δὲ ν ι τοῦ ω, τὸ δὲ ξ ι γ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα χωρία μείζονά ἐστι τοῦ ρ χ ψ ω δ χωρίου. ἔστι δὲ τὸ ρ χ ψ ω δ τρίτον μέρος τοῦ α γ δ τριγώνου. δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ β γ δ τρίγωνον ἔλασσόν ἐστιν, ἢ τριπλάσιον τῶν κ ε, λ ζ, μ η, ν ι τραπεζίων, καὶ τοῦ ξ ι γ τριγώνου. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ζ φ τραπέζιον ἔλασσόν ἐστι τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ θ η τοῦ ψ, τὸ δὲ ι π τοῦ ω, τὸ δὲ ι ο γ τρίγωνον τοῦ δ, φανερὸν ὅτι καὶ πάντα τὰ εἰρημένα ἐλάσσονά ἐστι τοῦ δ ω ψ χ χωρίου. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ τὸ β δ γ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν, ἢ τριπλάσιον τῶν φ ζ, θ η, ι π τραπεζίων, καὶ τοῦ ι γ ο τριγώνου. ἔλασσον δὲ ἢ τριπλάσιον τῶν προγεγραμμένων.

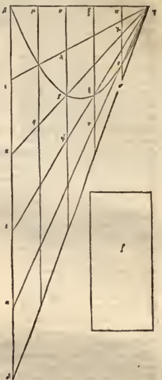
Ἔστω πάλιν τὸ β θ γ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἁ δὲ β γ ιϛ
μὴ ἔστω ποτ᾽ ὀρθὰς τᾷ διαμέτρῳ, ἀναγκαῖον δὲ ἤτοι τὰν ἀπὸ τοῦ β σαμείου παρὰ τὰν διάμετρον ἀγμέναν ἐπὶ τὰ τῷ τμάματι, ἢ τὰν ἀπὸ τοῦ γ ἀμβλεῖαν ποιεῖν γωνίαν ποτὶ τὰν β γ. ἔστω ἁ τὰν ἀμβλεῖαν ποιοῦσα ἁ πρὸς τῷ β, καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἀπὸ τοῦ β ἁ β δ. καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἁ γ δ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διῃρήσθω ἁ β γ εἰς τμάματα ἴσα ὁποσαοῦν τὰ β ε, ε ζ, ζ η, η ι, ι γ. ἀπὸ δὲ τῶν ε, ζ, η, ι παρὰ τὰν διάμετρον ἄχθωσαν αἱ ε σ, ζ τ, η υ, ι ξ. καὶ ἀπὸ τῶν σαμείων καθ᾽ ὃ τέμνοντι αὗται τὰν τοῦ κώνου τομὰν ἐπιζευχθῶσαν ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. φαμὶ δὴ καὶ νῦν, τὸ β δ γ τρίγωνον, τῶν μὲν τραπεζίων τῶν β φ, λ ζ, θ υ, π ι, καὶ τοῦ γ ι ξ τριγώνου ἔλασσον εἶμεν ἢ τριπλάσιον. τῶν δὲ ζ φ, η θ, ι π, καὶ τοῦ γ ο ι τριγώνου μεῖζον ἢ τριπλάσιον. ἐκβεβλήσθω ἁ δ β ἐπὶ θάτερα, ἀγαγὼν κάθετον τὰν γ κ, τᾷ γ κ ἴσαν ἀπέλαβον τὰν α κ. νοείσθω δὲ πάλιν ζύγιον τὸ α γ. μέσον δὲ αὐτοῦ τὸ κ, καὶ κρεμάσθω ἐκ τοῦ κ. κρεμάσθω δὲ καὶ τὸ γ κ δ τρίγωνον ἐκ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ζυγοῦ κατὰ τὰ γ κ, ἔχον ὡς νῦν κεῖται, ἐκ τοῦ θατέρου μέρους τοῦ ζυγοῦ κρεμάσθωσαν

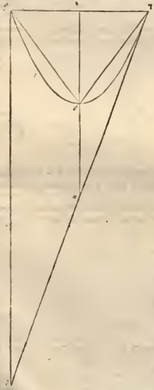
κατὰ τὸ α τὰ ρ χ ψ ω δ χωρία, καὶ τὸ μὲν ρ τῷ δε τραπεζίῳ ἰσοῤῥοπείτω, οὕτως ἔχοντι ὡς νῦν κεῖται. τὸ δὲ χ τῷ ζσ τραπεζίῳ. τὸ δὲ ψ τῷ τη. τὸ δὲ ω τῷ υι. τὸ δὲ δ τῷ γιξ τριγώνῳ. ἰσοῤῥοπήσει δὲ καὶ τὸ ὅλον τῷ ὅλῳ. ὥστε εἴη ἂν καὶ τὸ δβγ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ρχψωδ χωρίου. ὁμοίως δὲ τῷ πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ βφ τραπέζιον τοῦ ρ χωρίου μεῖζον, καὶ τὸ μθ τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ χ χωρίου, τὸ δὲ ζφ ἔλαττον. καὶ τὸ μὲν μη τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ψ χωρίου. τὸ δὲ ηθ ἔλασσον. καὶ ἔτι τὸ μὲν νι τραπέζιον μεῖζον ἐὸν τοῦ ω χωρίου, τὸ δὲ πι ἔλασσον. καὶ τὸ μὲν ξιγ τρίγωνον μεῖζον τοῦ δ χωρίου. τὸ δὲ γιο ἔλασσον. δῆλον οὖν ἐστιν.



ις Ἔστω πάλιν τμᾶμα τὸ βθγ, περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω διὰ μὲν τοῦ β ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον. ἀπὸ δὲ τοῦ γ ἁ γδ, ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἔστω δὲ τοῦ βδγ τριγώνου τρίτον μέρος τὸ ζ χωρίον. φαμὶ δὴ τὸ βθγ τμᾶμα ἴσον εἶμεν τῷ ζ χωρίῳ. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω δὲ πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον. ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ βθγ τμᾶμα τοῦ ζ χωρίου, συντιθεμένα αὐτὰ ἑαυτᾷ ἐσσεῖται μείζων τοῦ βγδ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν τι χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ βδγ τριγώνου. ἔστω δὲ τὸ βγε τρίγωνον ἔλασσόν τε τᾶς εἰρημένας ὑπεροχᾶς, καὶ μέρος τοῦ βδγ τριγώνου. ἐσσεῖται δὲ τὸ αὐτὸ ἁ βε μέρος τᾶς βδ. διῃρήσθω οὖν ἁ βδ εἰς τὰ μέρη. καὶ ἔστω τὰ τῶν διαιρέσιων σημεῖα τὰ η, ι, κ. καὶ ἀπὸ τῶν η, ι, κ σαμείων ἐπὶ τὰν γ εὐθεῖαι ἐπεζεύχθωσαν. τέμνοντι δὲ αὗται τὰν τοῦ κώνου τομάν, ἐπεὶ ἁ γδ ἐπιψαύουσά ἐστιν αὐτᾶς κατὰ τὸ γ. καὶ διὰ τῶν σαμείων τέμνοντι τὰν τομάν, αἱ εὐθεῖαι ἄχθωσαν παρὰ τὰν διάμετρον, αἱ μφ, νρ, ξθ. ἐσσοῦνται δὲ αὗται καὶ παρὰ τὰν βδ. ἐπεὶ οὖν ἔλασσόν ἐστι τὸ βγε τρίγωνον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ βθγ τμᾶμα τοῦ ζ χωρίου, δῆλον ὡς τὰ συναμφότερα τό τε ζ χωρίον, καὶ τὸ βγε τρίγωνον, ἐλάσσονά ἐστι τοῦ τμάματος. καὶ τῷ βγε τριγώνῳ ἴσα τὰ τραπέζιά ἐστι. δι᾽ ὧν ἁ τοῦ κώνου τομὰ πορεύεται, τὰ με, φλ, θρ, θο, καὶ τὸ γοσ τρίγωνον. τὸ μὲν γὰρ με τραπέζιον κοινόν, τὸ δὲ μλ ἴσον τῷ φλ, καὶ τὸ λξ ἴσον τῷ θρ. καὶ τὸ χξ ἴσον τῷ οθ. καὶ τὸ γχπ τρίγωνον τῷ γοσ τριγώνῳ. τὸ δὲ ζ χωρίον ἔλασσόν ἐστι τῶν τραπεζίων τῶν μλ, ξρ, πθ, καὶ τοῦ πογ τριγώνου. καὶ ἔστι τὸ βδγ τρίγωνον τριπλάσιον τοῦ ζ χωρίου. τὸ δὴ βδγ ἔλασσόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τῶν μλ, ρξ, θπ τραπεζίων, καὶ τοῦ πογ τριγώνου, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ μεῖζον ἢ τριπλάσιον. οὐκ οὖν οὐ μεῖζόν ἐστι τὸ βθγ τμᾶμα τοῦ ζ χωρίου. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἔλασσον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, ἔλασσον. πάλιν ἁ ὑπεροχὰ ᾇ ὑπερέχει τὸ ζ χωρίον τοῦ βθγ τμάματος, αὐτὰ ἑαυτᾷ συντιθεμένα ὑπερέχει καὶ τοῦ βδγ τριγώνου. δυνατὸν δέ ἐστι λαβεῖν χωρίον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς, ὃ ἐσσεῖται μέρος τοῦ βδγ τριγώνου.

γώνου. ἔστω οὖν τὸ β γ ε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς καὶ μεῖζον τοῦ β δ γ τριγώνου. καὶ τὰ ἄλλα τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ἐπεὶ οὖν δεῖ τὸ β γ ε τρίγωνον ἔλασσον τᾶς ὑπεροχᾶς ᾇ ὑπερέχει τὸ ζ χωρίον τοῦ β θ γ τμάματος, τὸ β ε γ τρίγωνον, καὶ τὸ β θ γ τμᾶμα ἀμφότερα ἐλάσσονα ἐντὶ τοῦ ζ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζ χωρίον ἔλασσον τῶν τετραπλεύρων τῶν ε μ, φ ν, ψ ξ, π τ, καὶ τοῦ γ π σ τριγώνου. ἔστι γὰρ τὸ β δ γ τοῦ ζ τριπλάσιον, τὸ δὲ εἰρημένον χωρίον ἔλασσον ἢ τριπλάσιον, ὡς ἐν τοῖς πρὸ τούτου ἐδείχθη. ἔλασσον ἄρα τὸ β γ ε τρίγωνον, καὶ τὸ β θ γ τμᾶμα τῶν τετραπλεύρων τῶν ε μ, φ ν, ξ ψ, π τ, καὶ τοῦ γ π σ τριγώνου. ὥστε κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ τμάματος, ἔλασσον εἴη καὶ τὸ γ β ε τρίγωνον τοῦ περιλειπομένου χωρίου, ὅπερ δεῖν ἀδύνατον. ἐδείχθη γὰρ ἴσον ἐὸν τὸ β ε γ τρίγωνον τοῖς τραπεζίοις τοῖς ε μ, φ λ, θ ρ, θ ο, καὶ τῷ γ ο σ τριγώνῳ, ἃ δεῖν μείζονα τοῦ περιλειπομένου χωρίου. οὐκ ἄρα ἔλασσον τὸ β θ γ τμᾶμα τοῦ ζ χωρίου. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα τὸ τμᾶμα τοῦ ζ χωρίου.



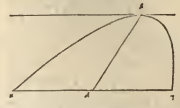


Τούτου δὲ δεδειγμένου φανερόν, ὅτι πᾶν τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. ιζ ἔστω γὰρ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας τε καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, κορυφὰ δὲ αὐτοῦ ἔστω τὸ θ σαμεῖον. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ β θ γ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ θ σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος, ἁ ἀπὸ τοῦ θ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα δίχα τέμνει τὰν β γ. καὶ ἁ β γ ἐστὶ παρὰ τὰν ἐπιψαύουσαν τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ θ. ἄχθω δὲ ἁ ε θ παρὰ τὰν διάμετρον. ἄχθω δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ β παρὰ τὰν διάμετρον ἁ β δ. ἔστω δὲ τοῦ γ ἁ γ δ ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς κατὰ τὸ γ. ἐπεὶ οὖν ἁ μὲν ε θ παρὰ τὰν διάμετρον ἐστίν, ἁ δὲ γ δ ἐπιψαύουσα τᾶς τομᾶς κατὰ τὸ γ, ἁ δὲ ε γ παράλληλός ἐστι τᾷ ἐπιψαυούσᾳ τᾶς το-

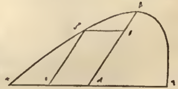
μᾶς κατὰ τὸ θ. τὸ βδγ τρίγωνον τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ βθγ τριγώνου. ἐπεὶ δὲ τὸ βδγ τρίγωνον, τοῦ μὲν βθγ τμάματος διπλάσιον, δῆλον ὡς ἐπίτριτόν ἐστι τὸ βθγ τμῆμα τοῦ βθγ τριγώνου.

Τῶν τμημάτων τῶν περιεχομένων ὑπό τε εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμᾶς, βάσιν μὲν καλῶ τὰν εὐθεῖαν, ὕψος δὲ τὰν μεγίσταν κάθετον ἀπὸ τᾶς καμπύλας γραμμᾶς, ἀγομέναν ἐπὶ τὰν βάσιν τοῦ τμάματος. κορυφὰν δὲ τὸ σαμεῖον, ἀφ᾽ οὗ ἁ μεγίστα κάθετος ἄγεται.

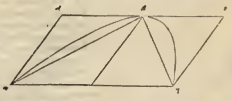
ιη Εἴκα ἐν τμάματι ὃ περιέχεται ὑπὸ εὐθείας, καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὰν διάμετρον, κορυφὰ ἐσεῖται τοῦ τμάματος τὸ σαμεῖον, καθ᾽ ὃ ἁ παρὰ τὰν διάμετρον ἀχθεῖσα τέμνει τὰν τοῦ κώνου τομάν. ἔστω γὰρ τμῆμα τὸ αβγ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ ἀπὸ μέσας τᾶς αγ ἄχθω ἁ δβ παρὰ τὰν διάμετρον. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου τομᾷ ἁ βδ ἆκται παρὰ τὰν διάμετρον, καὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ αδ, δγ, δῆλον ὡς παράλληλός ἐντι ἅ τε αγ, καὶ ἁ κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσα τᾶς τοῦ κώνου τομᾶς. φανερὸν οὖν ὅτι ἀπὸ τᾶς τομᾶς ἐπὶ τὰν αγ ἀγομενᾶν καθέτων μεγίστα ἐσεῖται, ἁ ἀπὸ τοῦ β ἀγομένα. κορυφὰ οὖν ἐστὶ τοῦ τμάματος τὸ β σαμεῖον.



ιθ Εἴκα τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι παρὰ τὰν διάμετρον, ἁ μὲν ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος, ἁ δὲ ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας, ἁ ἀπὸ μέσας τᾶς βάσιος ἀχθεῖσα, τᾶς ἀπὸ μέσας τᾶς ἡμισείας ἀγομένας ἐπίτριτος ἐσεῖται μάκει. ἔστω γὰρ τὸ αβγ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. καὶ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον ἁ μὲν βδ, ἀπὸ μέσας τᾶς αγ, ἁ δὲ εζ ἀπὸ μέσας τᾶς αδ. ἄχθω δὲ καὶ ἁ ζθ παρὰ αε. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίου κώνου τομᾷ ἁ βδ παρὰ τὰν διάμετρον ἆκται. καὶ αἱ αδ, ζθ παρὰ τὰν κατὰ τὸ β ἐπιψαύουσαν. ἐσσεῖ μέν τοι δῆλον, ὡς τὸν αὐτὸν ἔχοντι λόγον ἁ βδ ποτὶ τὰν βθ μάκει, ὃν ἁ αδ ποτὶ τὰν ζθ δυνάμει. τετραπλασία ἄρα ἐστὶ καὶ ἁ βδ τᾶς βθ μάκει. φανερὸν οὖν ὅτι ἐπίτριτός ἐστιν ἁ βδ τᾶς εζ μάκει.



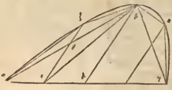
κ Εἴκα εἰς τμῆμα περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, τρίγωνον ἐγγραφῇ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, μεῖζον ἐσσεῖται τὸ ἐγγραφὲν τρίγωνον, ἢ ἥμισυ τοῦ τμάματος. ἔστω γὰρ τὸ αβγ τμᾶμα, οἷον εἴρηται. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸ τρίγωνον τὸ αβγ, τὰν αὐτὰν ἔχον βάσιν τῷ ὅλῳ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ τρίγωνον τῷ τμάματι τὰν αὐτὰν ἔχει βάσιν, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἀναγκαῖον τὸ β σαμεῖον κορυφὰν εἶναι τοῦ τμάματος. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἁ αγ τᾷ κατὰ τὸ β ἐπιψαυούσᾳ τᾶς τομᾶς. ἄχθω ἁ δε διὰ τοῦ β παρὰ τὰν αγ. καὶ ἀπὸ τῶν α, γ αἱ αδ, γε, παρὰ τὰν διάμετρον. πεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τοῦ τμάματος. ἐπεὶ οὖν ἥμισύ ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τοῦ αδεγ παραλληλογράμμου, φανερὸν ὅτι μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ τμάματος. δείκνυμεν, δῆλον ὅτι ὡς ἂν τοῦτο τὸ τμῆμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράψαι. ὥστε ἅμα τὰ περιλειπόμενα τμάματα παντὸς ἐλάσσονα,



τοῦ

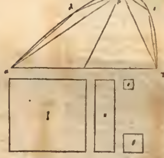
τοῦ προτεθέντος χωρίου. ἀφαιρουμένου γὰρ ἀεὶ μείζονος ἢ ἡμίσεος, δῆλον ὅτι φανερόν ἐστι ἐλασσοῦντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμήματα, ποιησομὲν ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου.

Εἰ κα ἐς τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς τρίγωνον ἐγγραφῇ, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἐγγραφέωντι δὲ καὶ ἄλλα τρίγωνα ἐν τὰ λειπόμενα τμάματα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμαμάτεσσι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἑκατέρου τῶν τριγώνων τῶν ἐς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐγγραφέντων, ὀκταπλάσιον ἐσσεῖται τὸ τρίγωνον τὸ ἐς τὸ ὅλον τμᾶμα ἐγγραφέν. ἔστω τὸ αβγ τμᾶμα, οἷον εἴρηται. καὶ τετμάσθω ἁ αγ δίχα τῷ δ. ἁ δὲ βδ ἄχθω παρὰ τὰν διάμετρον, τὸ β ἄρα σαμεῖον κορυφά ἐστι τοῦ τμάματος. τὸ ἄρα αβγ τρίγωνον τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. πάλιν τετμάσθω δίχα ἁ αδ τῷ ε. κα (21)



καὶ ἄχθω ἁ εζ παρὰ τὰν διάμετρον. τετμάσθω δὲ ἁ αβ κατὰ τὸ θ. τὸ ἄρα ζ σαμεῖον κορυφή ἐστι τμάματος τοῦ αζβ. τρίγωνον ἄρα τὸ αζβ τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχει τῷ αζβ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. δεικτέον ὅτι ὀκταπλάσιόν ἐστι τὸ αβγ τρίγωνον τοῦ αβζ τριγώνου. ἐστὶν οὖν ἁ βδ τᾶς μὲν εζ ἐπίτριτος, τᾶς δὲ εθ διπλασία. διπλασία ἄρα ἐστὶν ἁ εθ τᾶς θζ. ὥστε καὶ τὸ αεβ τρίγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ζβα. τὸ μὲν γὰρ αεθ διπλάσιόν ἐστι τοῦ αθζ. τὸ δὲ θβε τοῦ ζθβ. ὥστε τὸ αβγ τοῦ αζβ ὀκταπλάσιον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τοῦ ἐς τὸ βηγ τμᾶμα ἐγγραφέντος.

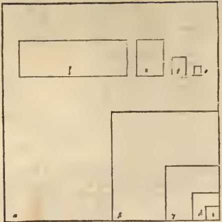
Εἰ κα ᾖ τμᾶμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, καὶ χωρία τεθέωντι ἑξῆς ὁποσαοῦν ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ. ᾖ δὲ τὸ μέγιστον τῶν χωρίων ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονα ἐσσεῖται τοῦ τμάματος. ἔστω γὰρ τμᾶμα τὸ αδβεγ, περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου τομᾶς. χωρία δὲ ἔστω ὁποσαοῦν ἑξῆς κείμενα τὰ ζ, η, θ, ι. τετραπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ζ. καὶ ἔστω τὸ ζ ἴσον τῷ τριγώνῳ τῷ βάσιν ἔχοντι τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ὕψος ἴσον. λέγω ὅτι τὸ τμᾶμα τῶν ζ, η, θ, ι χωρίων μεῖζόν ἐστιν. ἔστω τοῦ μὲν ὅλου τμάματος κορυφὰ τὸ β. τῶν δὲ περιλειπομένων τμαμάτων τὰ δ, ε. ἐπεὶ οὖν τὸ αβγ τρίγωνον ὀκταπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν αβδ, βεγ τριγώνων, δῆλον ὅτι ὡς ἀμφοτέρων αὐτῶν ἐστὶ τετραπλάσιον. καὶ ἐπεὶ τὸ αβγ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ζ χωρίῳ, κατὰ τὰ αὐτὰ κβ (22)



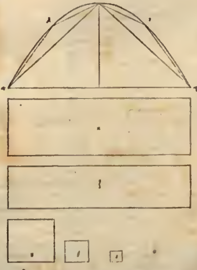
ἦ καὶ τὰ αδβ, βεγ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ η χωρίῳ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐς τὰ περιλειπόμενα τμάματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμάμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό, ἴσον ὄντων τῷ θ. καὶ ἐν τὰ ὕστερον γινόμενα τμάματα ἐγγραφόμενα τρίγωνα ἴσα τῷ ι χωρίῳ, σύμπαντα ἄρα τὰ προτεθέντα χωρία ἴσα ἐσσοῦνται πολυγώνῳ τινὶ ἐγγραφέντι ἐν τὸ τμᾶμα. φανερὸν οὖν, ὅτι ἔλασσον ἐστὶ τοῦ τμάματος.

Εἰ κα μεγέθεα συντεθέωντι ἑξῆς ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ τὰ πάντα μεγέθεα, καὶ ἔτι τοῦ ἐλαχίστου τὸ τρίτον μέρος ἐς τὸ αὐτὸ συντεθέντα, ἐπίτριτα ἐσσοῦνται τοῦ μεγίστου. ἔστω οὖν ὁποσαοῦν μεγέθεα ἑξῆς κείμενα τὰ α, β, γ, δ, ε τετραπλάσιονα ἕκαστον τοῦ ἑπομένου. μέγιστον δὲ ἔστω τὸ α. ἔστω δὲ τὸ μὲν ζ τρίτον τοῦ β, τὸ δὲ η τοῦ γ, τὸ δὲ θ τοῦ δ, τὸ δὲ ι τοῦ ε. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ζ τοῦ β τρίτον μέρος ἐστὶ, τὸ δὲ β τοῦ α τέταρτον μέρος ἐστὶν, ἀμφότερα τὰ β, ζ, μέρος τρίτον ἐστὶ τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ η, γ τοῦ β. καὶ τὰ θ, δ τοῦ γ. καὶ τὰ ι, ε τοῦ δ, καὶ κγ (23)

δ. καὶ τὰ σύμπαντα δὴ τὰ β γ δ ε ζ η θ ι, τρίτον μέρος ἐστὶ τῶν συμπάντων τῶν α β γ δ ε. ἔστι δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ζ η θ τρίτον μέρος αὐτῶν τῶν β γ δ. καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τὰ β γ δ ε, τοῦ λοιποῦ τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ α. δῆλον οὖν, ὅτι τὰ σύμπαντα τὰ α β γ δ ε, καὶ τὸ ι, τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ ε, τοῦ α ἐστὶν ἐπίτριτα.



κδ Πᾶν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς, ἐπίτριτόν ἐστι τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον. ἔστω γὰρ τὸ α δ β ε γ τμῆμα περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς. τὸ δὲ α β γ τρίγωνον ἔστω, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχον τῷ τμήματι, καὶ ὕψος ἴσον. τοῦ δὲ α β γ τριγώνου ἔστω ἐπίτριτον τὸ κ χωρίον. δεικτέον ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ α δ β ε γ τμήματι. εἰ γὰρ μή ἐστιν ἴσον, ἤτοι μεῖζον, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον εἰ δυνατόν, μεῖζον τὸ α δ β ε γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἐνέγραψα δὴ τὰ α δ β, β ε γ τρίγωνα, ὡς εἴρηται. ἐνέγραψα δὲ εἰς τὰ περιλειπόμενα τμήματα ἄλλα τρίγωνα, τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμάμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. καὶ ἀεὶ εἰς τὰ ὕστερον γινόμενα τμήματα ἐγγράφω δύο τρίγωνα τὰν αὐτὰν βάσιν ἔχοντα τοῖς τμάμασι, καὶ ὕψος τὸ αὐτό. ἐσσοῦνται δὴ τὰ καταλειπόμενα τμήματα ἐλάσσονα τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ α δ ε β γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ὥστε τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον μεῖζον ἐσσεῖται τοῦ κ, ὅπερ ἀδύνατον. ἐπεὶ ἐστὶν ἑξῆς κείμενα χωρία ἐν τῷ τετραπλασίονι λόγῳ. πρῶτον μὲν τὸ α β γ τρίγωνον τετραπλάσιον τῶν α δ β, β ε γ τριγώνων. ἔπειτα δὲ, τὰ αὐτὰ τετραπλάσια τῶν εἰς τὰ ἑπόμενα τμήματα ἐγγραφέντων. καὶ ἀεὶ οὕτω δῆλον, ὡς σύμπαντα τὰ χωρία ἐλάσσονά ἐστιν, ἢ ἐπίτριτα τοῦ μεγίστου. τὸ δὲ κ ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ μεγίστου χωρίου. οὐκ ἄρα ἐστὶ μεῖζον τὸ α δ β ε γ τμῆμα τοῦ κ χωρίου. ἔστω δὲ εἰ δυνατὸν, ἔλασσον. κείσθω δὴ τὸ μὲν α β γ τρίγωνον, ἴσον τῷ ζ. τοῦ δὲ ζ τέταρ-



τέταρτον τὸ κ. καὶ ὁμοίως τοῦ κ τὸ θ. καὶ ἀεὶ ἑξῆς τιθέσθω. ὥς τε καταλειφθῆναι τὸ ἔσχατον ἔλαττον τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει τὸ κ χωρίον τοῦ τμήματος, καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ ι. ἐστὶ δὲ τὰ ζ η θ ι χωρία, καὶ τὸ τρίτον τοῦ ι, ἐπίτριτα τοῦ ζ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ κ τοῦ ζ ἐπίτριτον. ἴσον ἄρα τὸ κ τοῖς ζ η θ ι, καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ι. ἐπεὶ οὖν τὸ κ χωρίον τῶν μὲν ζ η θ ι χωρίων ὑπερέχει ἐλάσσονι τοῦ ι, τοῦ δὲ τμήματος μείζονι τοῦ ι, δῆλον ὡς μείζονά ἐστι τὰ ζ η θ ι χωρία τοῦ τμήματος, ὅπερ ἀδύνατον. ἐδείχθη γάρ, ὅτι ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν χωρία ἑξῆς κείμενα ἐν τετραπλασίονι λόγῳ, τὸ δὲ μέγιστον ἴσον ᾖ τῷ εἰς τὸ τμῆμα ἐγγραφομένῳ τριγώνῳ, τὰ σύμπαντα χωρία ἐλάσσονα ἐσεῖται τοῦ τμήματος. οὐκ ἄρα τὸ α δ β ε γ τμῆμα ἔλασσόν ἐστι τοῦ κ χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μεῖζον, ἴσον ἄρα ἐστὶν τῷ κ. τὸ δὲ κ χωρίον ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ τριγώνου τοῦ α β γ. καὶ τὸ α δ β ε γ τμῆμα ἐπίτριτόν ἐστι τοῦ α β γ τριγώνου.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ παραβολῆς τέλος.